SOLUCIONARIO DE LA SECCIÓN DE MATEMÁTICAS DE EXÁMENES DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA 2005-2010

He tenido la suerte de pasar a la Nacho (Nombre que da el vulgo a la Magnánima Universidad Nacional de Colombia) la primera vez que me presenté. Pero por cuestiones vocacionales me retiré de ingeniería de sistemas para presentarme a medicina. Pues la medicina china me encanta…

En fin… Este proyecto nace por necesidad. La necesidad de retribuir lo que se me ha otorgado y de estudiar para el nuevo examen de admisión. Gracias a www.pasaralaunacional.com y a Cristian Hernández por publicar los exámenes de 2005 a 2010 y por solucionar los de los últimos años, respectivamente.

Este es un gesto de agradecimiento que espero le sirva a mucha gente. Siempre he sido ~~no tan malo~~ medianamente bueno en matemáticas, y la ventaja de que sea matemáticas y no literatura o sociales es que se puede estar más seguro de las respuestas sin temor a la "interpretación subjetiva del sentido de tal o cual palabra…"

La mayoría de ejercicios están resueltos, algunos tienen una que otra demostración… Pero sólo algunos… Cuando me he equivocado en algún ejercicio y la equivocación no ha sido tan infantil, he dejado la huella del error para no caer en el mismo.

Si encuentra alguna errata, señor lector, por favor escríbame a kamiloelgenial@hotmail.com : se lo agradeceré infinitamente.

La idea del solucionario es ver el examen, que lo pueden descargar en http://www.descargas.pasaralaunacional.com/estructura-y-respuestas-de-los-examenes-de-admision-de-la-unal

e ir resolviendo cada problema. Es decir, ver el solucionario y el examen al mismo tiempo…

Por fin el proyecto está terminado…

Algunos símbolos que usé en la solución del examen (si no se entiende alguno, pregúntenme…)

Algunos símbolos usados:

$\therefore$ → "lo que equivale a decir"	$\forall$ → Para todo	→ tachón
$\in$ → "pertenece a"	$\exists$ → Existe un	$\cong$ → "congruente"
$\mid$ → "tal que"	$\Rightarrow$ → Entonces	$\mathbb{R}$ → Números reales
$\wedge$ → "y"	$\vee$ → "o"	$\mathbb{Z}$ → Números enteros
$\emptyset$ → "cero"	→ tachón forma 2	0 → cero

¡QUE COMIENCE LA FIESTA!

Camilo Alberto Pinzón Galvis

48.

$200 * 0.1 = 20$ afrodescendientes . El 10% de 200. (los estudiantes de psicología)

$20 * 0.9 = 18$ mujeres negras   El 90% de 20 (Los estudiante de psicología negros)

$20 - 18 = $ 2 hombres negros   18 (Las mujeres negras que estudian psicología)

48. A

49. $\begin{cases} a = b + 4 & (1) \\ ab - (a+b) = 20 & (2) \end{cases}$

$ab - a - b = 20$ Reemplazando (1) en (2)

$(b+4)b - (b+4) - b = 20 \therefore b^2 + 4b - 2b - 4 = 20 \therefore b^2 - 2b - 24 = \emptyset$

$\therefore (b-6)(b+4) \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} b = 6 \\ a = 10 \end{matrix}} \vee \boxed{\begin{matrix} b = -4 \\ a = \emptyset \end{matrix}}$

$b = a - 4$

$a(a-4) - (a + a - 4) = 20$

$a^2 - 4a - 2a + 4 = 20 \therefore a^2 - 6a - 16 = \emptyset \therefore (a-8)(a+2) \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} a = 8 \\ b = 4 \end{matrix}} \vee \boxed{\begin{matrix} a = 2 \\ b = -2 \end{matrix}}$

A. $-5 \wedge -1$

B. $4 \wedge -8$

C. $-6 \wedge -2$

D. $8 \wedge 12$.

Por los métodos de resolución de ecuaciones lineales, ninguna respuesta coherente obtuve.
Quizá porque no son ecuaciones lineales!
Pero realmente no sé cómo plantear el problema.
La respuesta, definitivamente es la C., pues cumple los requisitos del enunciado al reemplazar en (2), pero
No se cómo llegar a ESA RESPUESTA.
¡Que alguien me explique, por favor!

49. C

50. $MCD(m,n) = 1. \Rightarrow$

A. Primos? $M.CD(8,9) = 1$. $8, 9 \notin$ primos. FALSO.

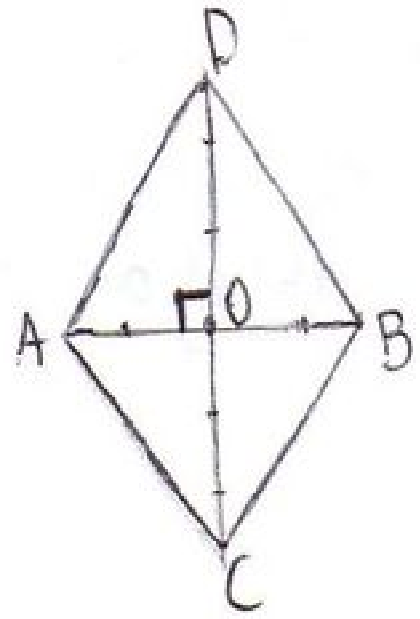
B. Su $mcm(m,n) = mn$. AL no tener divisores comunes, el menor de sus multiplos comunes es mn, pues $\nexists\, j, k \in Z^+ \mid j.m = kn$.
La demostración no se bien cómo plantearla, pero creo que debe ser sencilla. La idea intuitiva en mí está clara. VERDADERO.

50. B

C. Alguno es primo: Revisar A. FALSO

D. uno de ellos es par y otro impar. $M.C.D(9,25) = 1$. Ambos impares. FALSO.

51.



$\overline{AB} = 3$

$\overline{CD} = 5$

Perímetro = P_r

$\overline{DO} \cong \overline{OC} \wedge \overline{AO} \cong \overline{OB}$

En un rombo las diagonales se cortan a la mitad y son perpendiculares.

$\overline{AO} = \frac{3}{2} \wedge \overline{DO} = \frac{5}{2}$

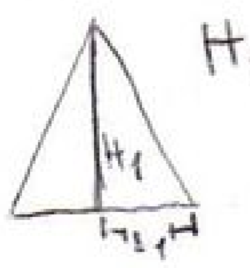
$$AD^2 = AO^2 + OD^2$$
$$= \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} + \frac{25}{4}$$
$$AD^2 = \frac{34}{4} = \frac{17}{2}$$

$$AD = \sqrt{\frac{17}{2}} = \frac{\sqrt{17}}{\sqrt{2}}$$

$$P_r = \frac{\sqrt{17}}{\sqrt{2}} * 4 = \frac{\sqrt{17}}{\cancel{\sqrt{2}}} \cdot \cancel{\sqrt{2}}\sqrt{2} \cdot 2 = 2\sqrt{34} = \boxed{4\sqrt{\frac{17}{2}}} \quad \text{R/A.}$$

$\boxed{51.\ D}$

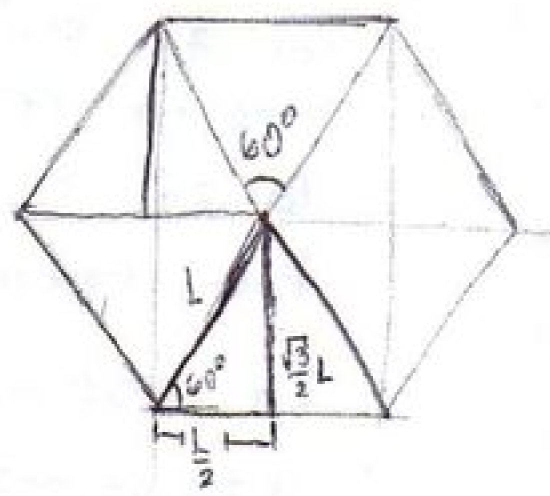
52. Area del Hexágono 1 = A_1 ; Area del Hexágono 2 = A_2



$H_1 = 3\,cm$

$$3 = \frac{\sqrt{3}}{2} L_1$$

$$\frac{L_1}{2} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \boxed{\sqrt{3} = \frac{L_1}{2}}$$



$\boxed{A_{T1} = \text{Area del Triangulo 1}}$

$$A_{T1} = \frac{H_1 \cdot L_1}{2 \cdot 2} \cdot \quad A_1 = \frac{H_1 \cdot L_1}{2 \cdot 2} \cdot 12 = 6 H_1 \frac{L_1}{2} = 6 \cdot 3 \cdot \sqrt{3} = \boxed{18\sqrt{3} = A_1}$$

$H_2 = 5\,cm$

$$5 = \frac{\sqrt{3}}{2} L_2 \therefore \frac{L_2}{2} = \frac{5}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \boxed{\frac{5\sqrt{3}}{3} = \frac{L_2}{2}}$$

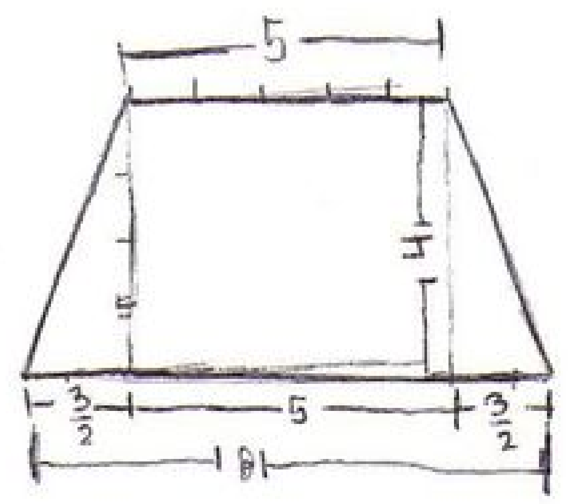
$$A_{T2} = \frac{H_2 \cdot L_2}{2 \cdot 2} = \frac{5 \cdot 5\sqrt{3}}{2 \cdot 3} \therefore A_2 = \frac{25\sqrt{3}}{3 \cdot 2} * 12 = \boxed{50\sqrt{3} = A_2}$$

$\boxed{52.C}$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{18\sqrt{3}}{50\sqrt{3}} = \boxed{\boxed{\frac{9}{25}} = \frac{A_1}{A_2}}$$

Lo de usar $\frac{L}{2}$ fue una pendejada.
Era más claro usar L. Pero igual sirve el detestado $\frac{L}{2}$...

53.



$B_m = 5$, $B_M = 8$, $h = 4$

$$A_T = 5 \cdot 4 + \tfrac{3}{2} \cdot 4$$
$$= 20 + 6$$
$$A_T = 26 \text{ cm}^2 = 26 \text{ cm}^2$$

$$A_T = B_m \cdot h + \frac{(B_M - B_m)h}{2}$$
$$= h\left(\frac{B_M - B_m}{2} + B_m\right) = h\left(\frac{B_M + B_m}{2}\right)$$

(1) Si se duplica el Bases del trapecio, el Area pedida es

$$A_{T_2} = 52 \text{ cm}^2$$

Si duplicamos Bases:

$B_m = 10$, $B_M = 16$, $h = 4$

$$A_{T2} = 4\left(\frac{10+16}{2}\right) = 4 \cdot 13 = 2 \cdot 26 = 52.$$

(1) Se duplica. VERDADERO.

(2) Duplicando altura: $B_m = 5$, $B_M = 8$, $h = 8$

$$A_{T2} = 8\left(\frac{5+8}{2}\right) = 8 \cdot \frac{13}{2} = 4 \cdot 13 = 52.$$

(2) se duplica. VERDADERO.

(1) ó (2) es suficiente para que el area del trapecio se duplique.

$\boxed{53.A}$

54. $f(t) = -3\cos(2t-5)$. El mínimo valor lo toma la función cuando $\cos(2t-5) = 1$, pues a este valor lo multiplica un número negativo. Se puede hacer por derivadas, pero no vale la pena dada su sencillez. $-1 \leq \cos(2t-5) \leq 1$

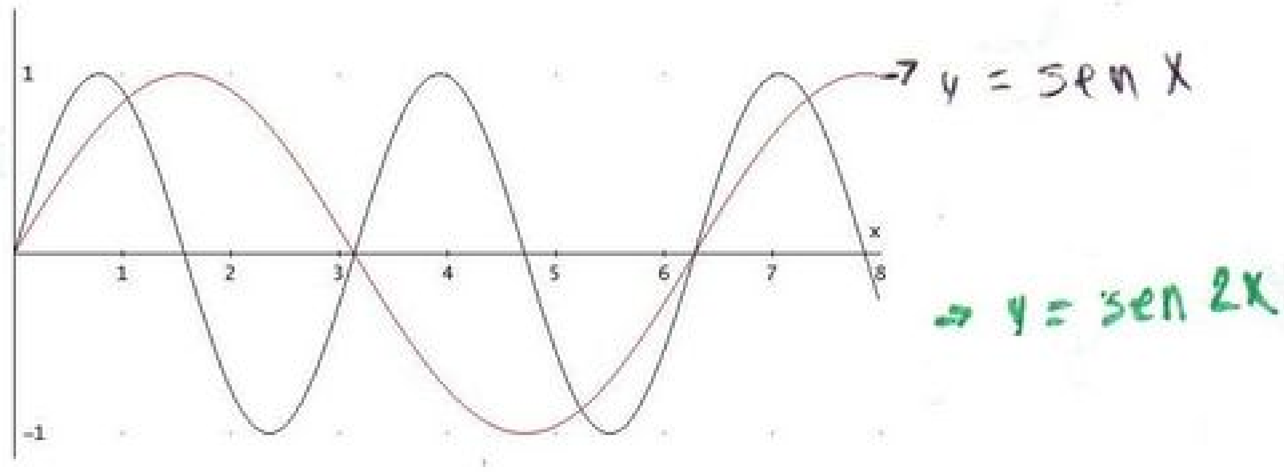
$$f(t) = -3\cos\left(2 \cdot \tfrac{5}{2} - 5\right)$$
$$= -3\cos(0)$$
$$\boxed{f(t) = -3}$$

$\boxed{54.B}$

55. $\left|\begin{pmatrix} \cos t & -\operatorname{sen} t \\ \operatorname{sen} t & \cos t \end{pmatrix}\right| = \cos^2 t - (-\operatorname{sen}^2 t) = \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

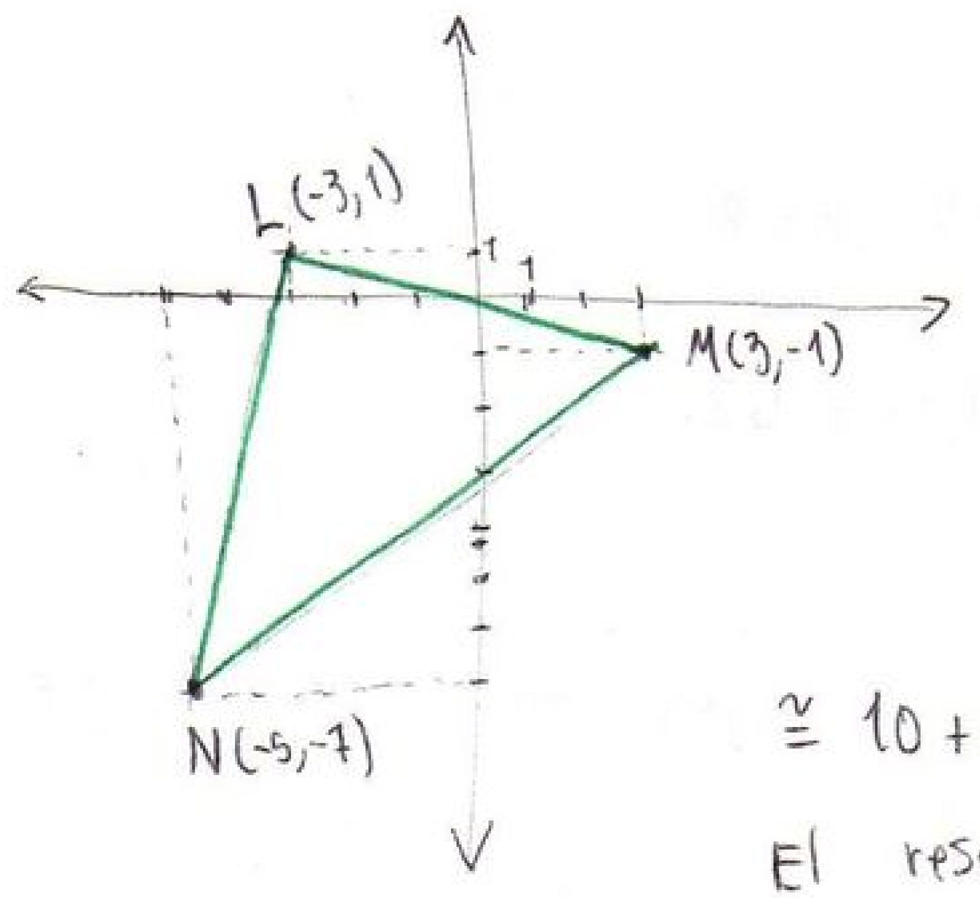
$\boxed{55.A}$

56. Gráfica de y = sen2x a partir de gráfica de y = senX...



$\boxed{56.D}$ *Corregido gracias a Maria Robayo ;)*

57.



$\overline{LN} = \sqrt{(-3-(-5))^2+(1-(-7))^2} = \sqrt{2^2+8^2} = \sqrt{64+4} = \sqrt{68} \cong 8.2$

$\overline{LM} = \sqrt{(-3-3)^2+(1-(-1))^2} = \sqrt{-6^2+2^2} = \sqrt{36+4} = \sqrt{40} \cong 6.3$

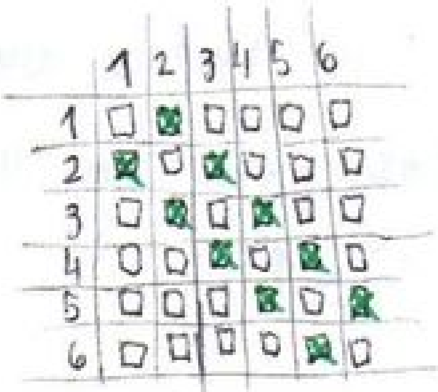
$\overline{NM} = \sqrt{[3-(-5)]^2+[-1-(-7)]} = \sqrt{8^2+6^2} = \sqrt{64+36} = \sqrt{100} = 10$

$\cong 10 + 8.2 + 6.3 = \boxed{24.5}$

El resultado está entre 20 – 25 unidades de perímetro.

$\boxed{57.A}$

58.



La probabilidad de que salgan dos números consecutivos es entonces:

$$\frac{10}{6\times6} = \boxed{\frac{10}{36}}$$

$\boxed{58.C}$

59. Placas que comienzan por vocal: 5 opciones, son pares: 5 opciones...

$$\text{Total combinaciones} = \underbrace{5}_{\text{elegir una vocal}} \times \underbrace{25}_{\text{elegir una de las 25 restantes letras}} \times \underbrace{24}_{\text{elegir la letra restante (sin repetir)}}$$ *x10x9x8/2*

10x9x8 representa el número de placas con dígitos distintos. lo divido en 2 para que me queden los pares

~~Nota: En realidad el último dígito está mal; Cuando alguno de los dos primeros números sea par, este 5 se volverá 4 ó 3 si los dos dígitos son pares. Aun así, es una buena aproximación...~~

$\boxed{59.D}$

=5x25x24x9x8x5

El ultimo dígito estaba bien, yo me había equivocado por apresurado. Creo que sigo sin aprender la lección...

Corregido gracias a Maria Robayo ;)

60. $2x^2-5x+2=\emptyset$

$(2x-1)(x-2)=\emptyset \therefore x=\frac{1}{2} \vee x=2$. $2\cdot\frac{1}{2}=\boxed{1}$ El producto de las soluciones de la ecuacion es 1.

$\boxed{60.C}$

61. $n+(n-2)+(n-4)=51$

$\boxed{3n-6=51}$

Tres impares consecutivos: $n, n-2, n-4$.

$\boxed{61.D}$

62. $x^3-8x^2+4x+48=$

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & -8 & 4 & 48 & 4 \\ 1 & 4 & -16 & -48 & \\ \hline 1 & -4 & -12 & \emptyset & \end{array}$$

$=(x^2-4x-12)(x-4)$

$=(x-6)(x+2)(x-4)$

Las "otras" raices son: -2 y 6.

$-2+6=$	4	Suma	4
$-2\times 6=$	-12	Producto	-12

$\boxed{62.B}$

63. $x^3+(k^2-1)x^2-4x+(4k+1)$ es divisible por $x+1$.

Haciendo división sintética:

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & k^2-1 & -4 & 4k+1 & -1 \\ 1 & -1 & -k^2+2 & k^2+2 & \\ \hline 1 & k^2-2 & -k^2-2 & k^2+4k+3=\emptyset & \end{array}$$

Para que sea divisible, el último término de la division sintética debe ser $\emptyset$. $[k^2+4k+3=\emptyset]$

$\to k^2+4k+3=\emptyset$.

$(k+3)(k+1)=\emptyset \therefore \boxed{k=-3 \vee k=-1.}$

Para comprobarlo... Haciendo $k=-3$ en $x^3+(k^2-1)x^2-4x+(4k+1)$...

$x^3+8x^2-4x-11$ dividiendo sintéticamente en $x+1$...

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & 8 & -4 & -11 & -1 \\ 1 & -1 & -7 & +11 & \\ \hline 1 & 7 & -11 & \emptyset & \end{array}$$

$(x^2+7x-11)(x+1)=x^3+8x^2-4x-11$

Haciendo $k=-1$...

x^3-0x^2-4x-3

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & 0 & -4 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & +1 & 3 & \\ \hline +1 & -1 & -3 & \emptyset & \end{array}$$

$(x^2-x-3)(x+1)=x^3-4x-3$

$\boxed{63.A}$

64. $y = mx+1 \wedge y = \frac{2}{2x-1}$

se intersectan en $x=1 \wedge x=t$ $\quad m=? \wedge t=?$

Con $x=1$... $\quad y = \frac{2}{2.1-1} = 2.$ $\quad 2 = m.1+1 \therefore \boxed{m=1} \therefore y = x+1$

$$x+1 = \frac{2}{2x-1} \therefore (2x-1)(x+1) = 2 \quad 2x^2+2x-x-1 = 2 \therefore 2x^2+x-3 = \emptyset$$

$$(2x+3)(x-1) = \emptyset \therefore 2x+3 = \emptyset \vee x-1 = \emptyset \therefore \boxed{x = -\frac{3}{2}} \vee \boxed{x = +1}$$

El otro punto de interseccion es $\boxed{x = t = -\frac{3}{2}}$

Por tanto... $\boxed{m=1 \wedge t = -\frac{3}{2}}$

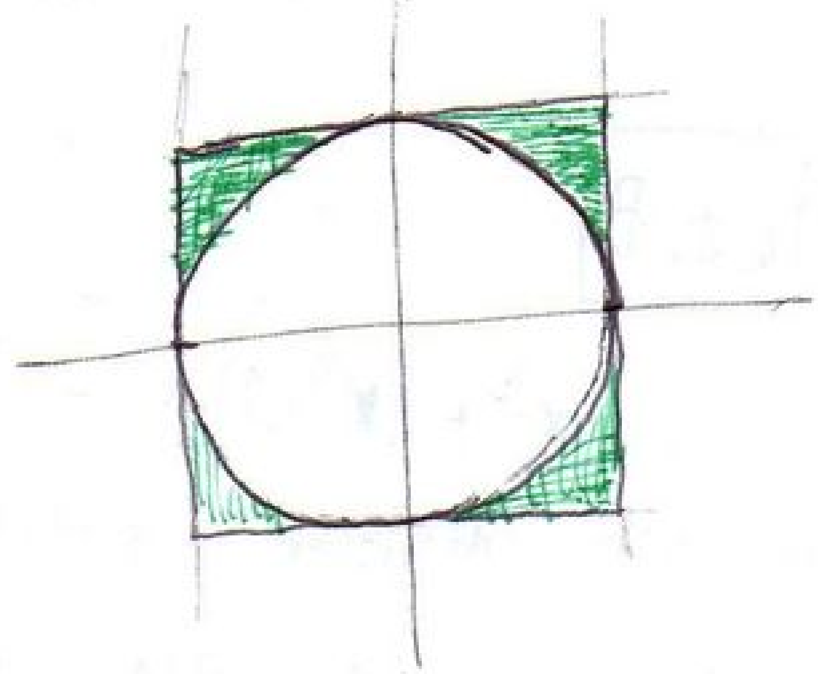
$\boxed{64.D}$

65.

La region sombreada es: Intersecado porque se debe limitar a y para que no se vaya y al infinito...

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1<x<1\right\} \cap$$

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{1-x^2} < y < 1 \underbrace{\text{ ó }}\ -1<y<-\sqrt{1-x^2}\right\}$$



la palabra "ó" denota unión.
la palabra "y" denota intersección.

La interseccion de $\sqrt{1-x^2}<y<1 \wedge -1<y<-\sqrt{1-x^2}$ es vacia. Los conjuntos son disyuntos.

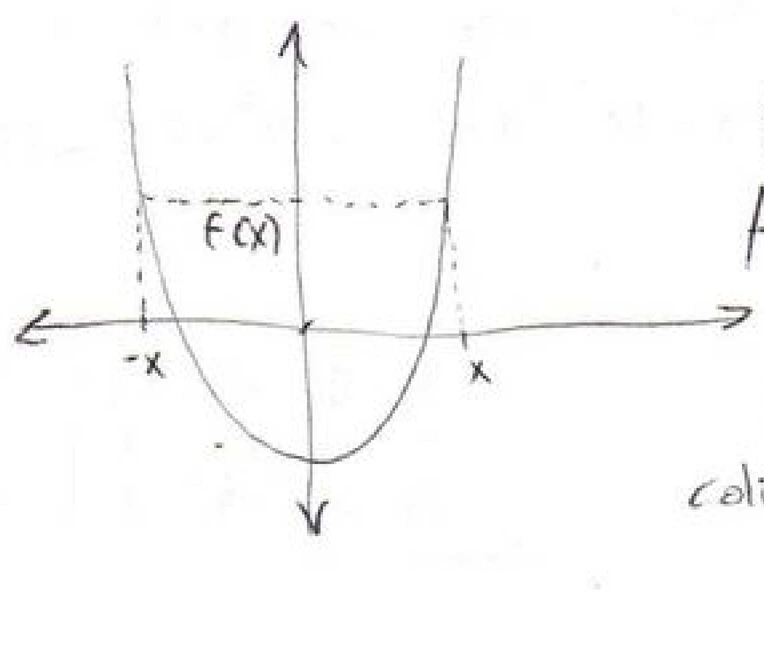
$\boxed{65.B}$

66.

Una funcion tal que $f(x) = f(-x)$ se llama función par.
Un ejemplo de este tipo de funciones es (el más clásico):

$$f(x) = x^2, \text{ pues } f(-x) = (-x)^2 = x^2$$

La gráfica de estas funciones tiene un eje de simetria en el eje y.



f es simétrica respecto
A. al eje y.
No es simetrica respecto al origen porque el origen no es colineal con $f(x) \wedge f(-x)$.

$\boxed{66.A}$

67. $P_1 = 1^2+2$; $P_2 = 2\times 2+2$; $P_3 = 3\times 3+2$; $P_4 = 4\times 4+2$

$\quad = 3 \qquad\qquad = 6 \qquad\qquad = 11 \qquad\qquad = 18$

$$P_n = n\times n + 2 = n^2+2.$$

Con $n = 50$,

$$P_{50} = 50\times 50 + 2 = 2500 + 2 = 2502.$$

En el paso 50 se deberán usar 2502 cuadros. $\square$.

$\boxed{67.D}$