SOLUCIONARIO DE LA SECCIÓN DE MATEMÁTICAS DE EXÁMENES DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA 2006-2010

He tenido la suerte de pasar a la Nacho (Nombre que da el vulgo a la Magnánima Universidad Nacional de Colombia) la primera vez que me presenté. Pero por cuestiones vocacionales me retiré de ingeniería de sistemas para presentarme a medicina. Pues la medicina china me encanta…

En fin… Este proyecto nace por necesidad. La necesidad de retribuir lo que se me ha otorgado y de estudiar para el nuevo examen de admisión. Gracias a www.pasaralaunacional.com y a Cristian Hernández por publicar los exámenes de 2006 a 2010 y por solucionar los de los últimos años, respectivamente.

Este es un gesto de agradecimiento que espero le sirva a mucha gente. Siempre he sido ~~no tan malo~~ medianamente bueno en matemáticas, y la ventaja de que sea matemáticas y no literatura o sociales es que se puede estar más seguro de las respuestas sin temor a la "interpretación subjetiva del sentido de tal o cual palabra…"

La mayoría de ejercicios están resueltos, algunos tienen una que otra demostración… Pero sólo algunos… Cuando me he equivocado en algún ejercicio y la equivocación no ha sido tan infantil, he dejado la huella del error para no caer en el mismo.

Si encuentra alguna errata, señor lector, por favor escríbame a kamiloelgenial@hotmail.com : se lo agradeceré infinitamente.

La idea del solucionario es ver el examen, que lo pueden descargar en http://www.descargas.pasaralaunacional.com/estructura-y-respuestas-de-los-examenes-de-admision-de-la-unal

e ir resolviendo cada problema.

(El examen 2008-1 aún no está publicado. Espero hacerlo pronto.)(Los solucionarios de 2010-1, 2006-2 y 2010-1 están hechos, pero me toca pasarlos para que se vean medio decentes… Esta semana lo hago.)

Algunos símbolos que usé en la solución del examen(si no se entiende alguno, pregúntenme…)

Algunos símbolos usados:

$\therefore$ → "lo que equivale a decir"
$\in$ → "pertenece a"
$|$ → "tal que"
$\wedge$ → "y"
$\emptyset$ → "cero"

$\forall$ → Para todo
$\exists$ → Existe un
$\Rightarrow$ → Entonces
$\vee$ → "o"
→ tachón forma 2

→ tachón
$\cong$ → "congruente"
$\mathbb{R}$ → Números reales
$\mathbb{Z}$ → Números enteros
0 → cero

¡QUE COMIENCE LA FIESTA!

Camilo Alberto Pinzón Galvis

52. $n, m \in$ impar $\quad n^2, m^2 \in$ impar $\quad n^2+m^2 =$ par.

si $m, n \in$ impar, supongamos un $j, k \in \mathbb{Z}^+$

$$m = 2k+1 \quad \wedge \quad n = 2j+1$$

$$m^2+n^2 = (2k+1)^2 + (2j+1)^2 = 4k^2+4k+1+4j^2+4j+1$$

$$= 4(k^2+k+j^2+j)+2 = 2.2[k(k+1)+j(j+1)]+2$$

$$m^2+n^2 = 2[\underbrace{k(k+1)}_{par} + \underbrace{j(j+1)}_{par} + 1]$$

$k(k+1) =$ par.impar ó impar.par $=$ par

2 # consecutivos son par e impar... → par*impar= par.

es decir, que $k(k+1)$ se puede escribir como un entero por 2 pues esa es la forma de los pares; igual que $j(j+1)$.

$$k(k+1) = 2x \quad \wedge \quad j(j+1) = 2y$$

Por tanto:

$$m^2+n^2 = 2[2x+2y+1] = 2[\underbrace{2(x+y)+1}_{impar}] \qquad \boxed{x+y=w}$$

$$= \underbrace{\overset{par}{2}\overbrace{[2w+1]}^{impar}}_{par} = 4w+2$$

→ A. No es un cuadrado perfecto.
B. No es divisible por 4
C. ES PAR ✓
D. No es impar

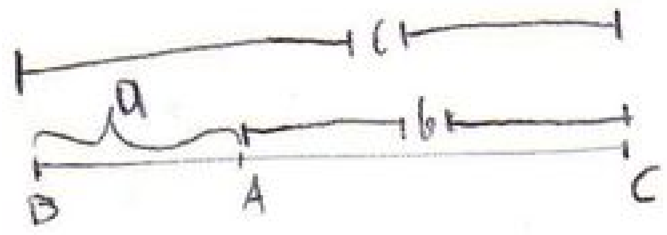
$\boxed{52.C}$

53. $(5n-2)3n - (5n-2)(n-1) = (5n-2)(3n-(n-1)) = (5n-2)(2n+1) = 10n^2+5n-4n-2 = \underbrace{10n^2+n-2}_{1^{er} \text{ método.}}$

$= 15n^2-6n-[5n^2-5n-2n+2] = 15n^2-6n-5n^2+7n-2 = \boxed{10n^2+n-2}$ 2^{do} metodo → =

$\boxed{53.D}$

54.



$AC = AB+12$
$BC = 4AB$
$AB+AC = BC$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = a+12 \\ c = 4a \\ a+b = c \end{cases}$$

$a, b = ?$

$a+b = 4a \therefore 3a = b$

$3a = a+12$

$2a = 12$

$\boxed{a=6}$

$b = 6+12$

$\boxed{b=18}$

$\boxed{54.B}$ $\quad \boxed{AB=6 \ \wedge \ AC=18}$

55. $p, q, r \to$ primos diferentes.

$p \neq q \neq r$ $\qquad a, b, c \in \mathbb{Z}^+$ $\qquad a > b > c$

$n = p^a q^c r^b \ \wedge \ m = p^b q^a r^c$. $MCD = ?$

$p^a q^c r^b \quad p^b q^a r^c$ $\boxed{\boxed{p^b \cdot q^c \cdot r^c} = MCD}$

$p^{a-b} q^{c-c} r^{b-c} \quad p^{b-b} q^{a-c} r^{c-c}$

$= p^{a-b} q^0 r^{b-c} \quad p^0 q^{a-c} r^0$

$= p^{a-b} r^{b-c} \cdot q^{a-c}$

se halla el máximo común divisor tomando la menor potencia de cada variable teniendo en cuenta que los exponentes sean ≥ 0 y que el exponente que quede sea ≥ 1. Tener en cuenta $a > b > c$.

$\boxed{55.C}$

56. $g(x) = x + \frac{1}{x}$

A. $g(-1) = -g(1)$ V.

$-2 = -2$

$g(-1) = -1 + \frac{1}{-1} = -1 - 1 = \boxed{-2}$

$-g(1) = -\left[1 + \frac{1}{1}\right] = \boxed{-2}$

B. $g(4) = 2g(2)$. F $\quad g(4) = 4 + \frac{1}{4} = \boxed{\frac{17}{4}} \ \wedge \ 2g(2) = 2\left[2 + \frac{1}{2}\right] = 2 \cdot \frac{5}{2} = \boxed{5}$

$\frac{17}{4} \neq 5$

C. $g(x+1) = g(x) + 1$. F

$g(x+1) = (x+1) + \frac{1}{(x+1)} = \frac{(x+1)^2 + 1}{x+1} = \frac{x^2 + 2x + 1 + 1}{x+1} = \frac{x^2 + 2x + 2}{x+1}$

$g(x) + 1 = x + \frac{1}{x} + 1 = \frac{x^2 + 1}{x} + 1 = \frac{x^2 + x + 1}{x}$

$\frac{x^2 + x + 1}{x} \neq \frac{x^2 + 2x + 2}{x+1}$

D. $g(-x) = g(x)$. F

$g(-x) = -x + \left(\frac{1}{-x}\right) = -x - \frac{1}{x} = -\left(x + \frac{1}{x}\right)$

$g(x) = x + \frac{1}{x}$

$-\left(x + \frac{1}{x}\right) \neq x + \frac{1}{x}$

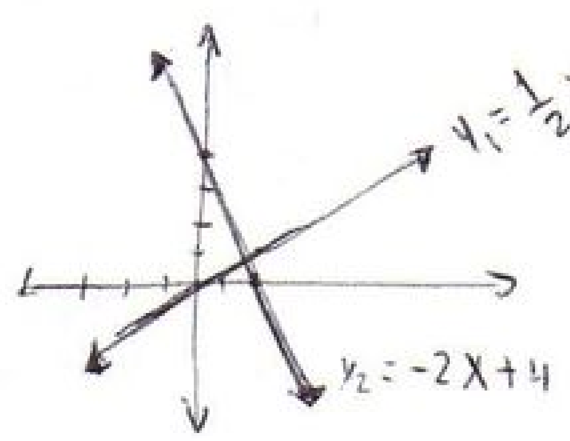
$\boxed{56.A}$

57. Pasa por $(0,4)$ $\perp$ $y_1 = \frac{1}{2}x$. $\qquad y_2 =$ recta pedida

$m(y_1) = \frac{1}{2} = m_1$

Pendiente de y_1

$y_2 = -2x + 4$. $\quad$ $+4$ pues cuando $x = 0$, $y = 4$. $(0,4)$...



$m_1 \cdot m_2 = -1$.

$\frac{1}{2} m_2 = -1 \quad \therefore \quad m_2 = -2$

$\boxed{57.B}$

58. $Ax + By + C = \emptyset$

$By = -Ax - C$

$y = \boxed{-\frac{A}{B}} x - \frac{C}{B}$

$\rightarrow$ Pendiente.

(1) ∴ V.

Cuando $C = \emptyset$

$y = -\frac{A}{B}x$. Si $x = 0$; $y = 0$. $(0,0)$ pertenece a una de las rectas.

$C = \emptyset$ para una de las rectas. (la que pasa por el origen).

(2) F.

(3) graficamente se puede ~~comprobar~~ ver que la pendiente $m > \emptyset$. si $m > 0$

si $m > 0 \Rightarrow -\frac{A}{B} > 0$ Lo cual quiere decir que A tiene signo diferente a B.

Suponiendo $B > 0$. (para que no cambie el sentido de la desigualdad)

$-\frac{A}{B} \cdot B > 0 \cdot B \therefore -A > 0 \therefore A < 0$

Si suponemos $B < \emptyset$ (cambiando el sentido de la desigualdad)

$-\frac{A}{B} \cdot B > 0 \cdot B \therefore -A < 0 \therefore A > 0$.

Por lo que se "demuestra que A y B tienen signos contrarios.

Y por tanto:

$$AB < \emptyset$$

(3) F (4) V.

(1) ∧ (4) son verdaderas.

$\boxed{58.B}$

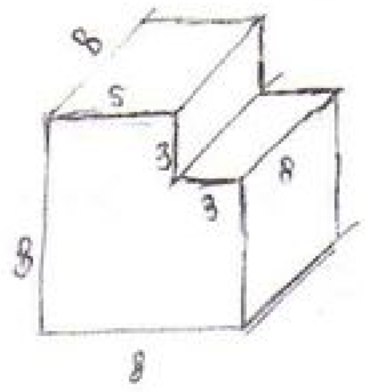
59. $64^{x-2} = 256^{2x} \therefore 64^{x-2} = (4^4)^{2x} \therefore (4^3)^{x-2} = (4^4)^{2x} \therefore ((2^2)^3)^{x-2} = ((2^2)^4)^{2x}$

$\therefore (2^2)^{3(x-2)} = (2^2)^{8x} \therefore 4^{3x-6} = 4^{8x} \Rightarrow 3x - 6 = 8x \therefore 8x - 3x = -6$

$\therefore 5x = -6 \therefore \boxed{x = -\frac{6}{5}}$

$\boxed{59.C}$

60.



$V = 8.8.8 - 3.3.8$

$= 8(64-9) = 8(55) = \boxed{440\ cm^3}$

$\boxed{60.A}$

61.

$L = [6m * 2] + [2\pi * 0.6]$

$= 12 + 1.2\pi$

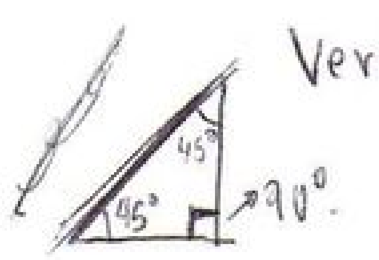
$= 1.2[10+\pi] \cong (1.2)(13.1416)$

$\cong 15.8.$

$$\begin{array}{r} 13.1416 \\ 1.2 \\ \hline 262832 \\ 131416 \\ \hline 15.76992 \end{array}$$

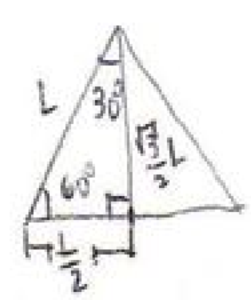
$\boxed{61.C}$

62. (1)



Verdadero. Si un ángulo es de 45° entonces el otro debe ser de 45° para que la suma de ∢s produzca 180°.

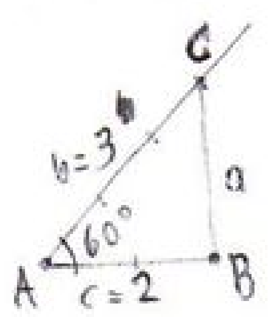
(2)



Verdadero. Ocurre cuando se traza la atura de un triángulo equilátero.

$\boxed{62.A}$

63.



$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$ → teorema del coseno.

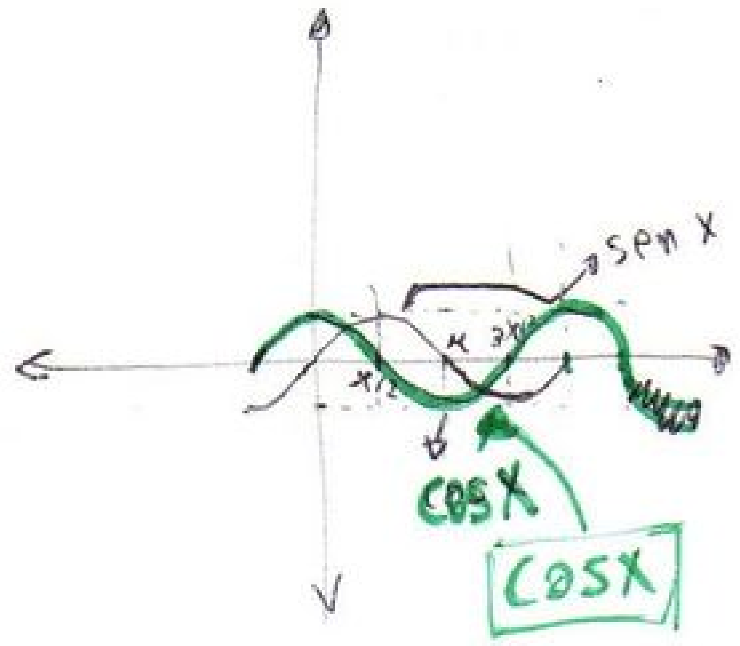
$a^2 = 3^2 + 2^2 - 2.3.2.\cos 60°$

$a^2 = 9 + 4 - 12.\frac{1}{2} = 13 - 6 = 7$

$a^2 = 7 \therefore \boxed{a = \sqrt{7}}$

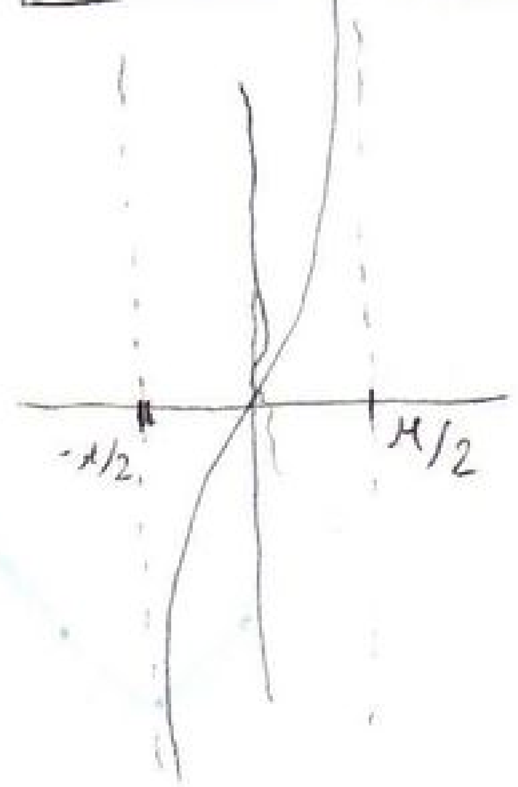
$\boxed{63.B}$

64.



$\cos x = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

$4\cos x = 4\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$



$\boxed{64.D}$

65. (1) $\tan\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ no está definida cuando $\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \emptyset$.

si $n = 4$ $\cos\left(\frac{4\pi}{2}\right) = \cos 2\pi = 1$. Está definida en algunas n

(1) Falso!

(2) $x, y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ $x < y \Rightarrow \tan x < \tan y$

(2) Verdadero. La función es creciente en todo su dominio.

(3) si $(\operatorname{sen} x)(\cos x) < \emptyset \Rightarrow x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$

Falso. si $x \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ también se cumple.

sería verdadero

si $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \Rightarrow (\operatorname{sen} x)(\cos x) < \emptyset$.

(3) F Pero que $(\operatorname{sen} x)(\cos x) < \emptyset$ no implica que $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

Revisar leyes de Morgan y Proposiciones (Valor de verdad).

(4) $\tan x \cdot \cos x = 1$ $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$. $\tan x \cdot \cos x = 1 \therefore \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \cdot \cos x = 1$. $\cos x \neq \emptyset$

$\boxed{x \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \ldots, \frac{(2n+1)\pi}{2}}$

$\therefore \operatorname{sen} x = 1$

$\boxed{x = \frac{\pi}{2}}$ pero vimos que $x \neq \frac{\pi}{2}$ porque

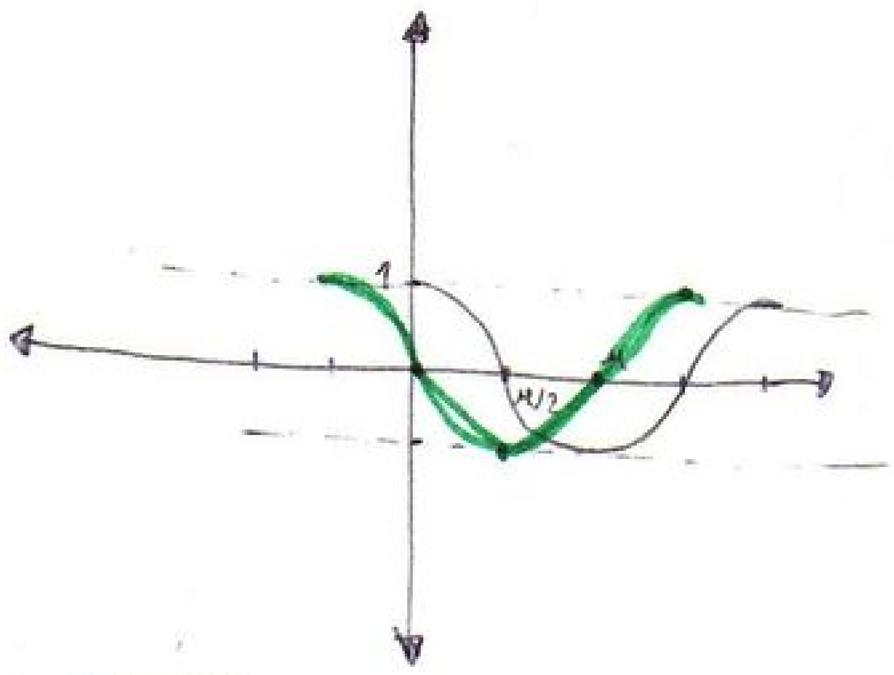
$\boxed{65.B}$

en ese valor $\cos x$ es indeterminado.

Por lo cual, la ecuación no tiene solución en aquel intervalo.

(4) V.

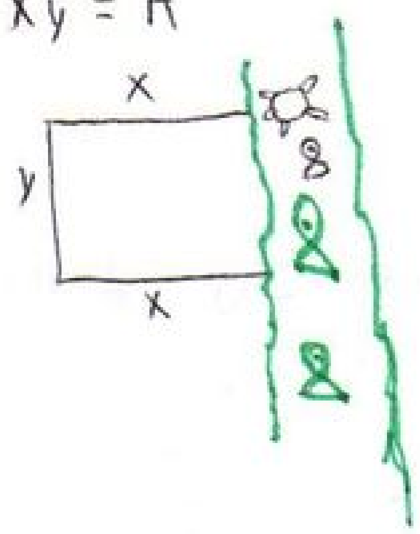
66. La gráfica de $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ se obtiene trasladando $y = \cos x$



$\frac{\pi}{2}$ unidades a la izquierda.

$\boxed{66.D}$

67. $\begin{cases} 2x + y = 2000 \\ xy = A \end{cases}$



$y = 2000 - 2x$

$xy = A$

$x(2000 - 2x) = A$

$2000x - 2x^2 = A$ Maximizando por medio de derivadas...

$2000 - 4x = \frac{dA}{dx}$ pero la derivada es $\emptyset$ cuando alcanza un máximo o un mínimo...

$2000 - 4x = \emptyset \therefore 2000 = 4x \therefore \boxed{x = 500}$

Rezando por que en $x = 500$ A se maximice...

$y = 2000 - 2x \therefore y = 2000 - 1000 = \boxed{1000 = y}$

$A = 500\ m * 1000\ m$

$\boxed{A = 500.000\ m^2}$

$\boxed{67.D}$

68. (1) z y w tienen los mismos divisores primos $\Rightarrow z = w$.

$z = 8$ $w = 4$. Divisores primos de $w = D_w = 2$; $D_z = 2$ $z \neq w$.

(1) F.

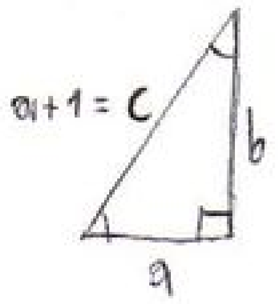
(2) z divide a w. $\frac{w}{z} \in \mathbb{Z}^+$ $z \leq w$...

2 divide a 8 $\frac{8}{2} = 4$ divisores de 8: 8,4,2,1 ; $D_2 = 2,1$. 4 no es divisor de 2

contraejemplo! (2) F.

$\boxed{68.A}$

69.



$$c = a+1$$

$$b^2 = c^2 - a^2 \therefore \quad b^2 = (a+1)^2 - a^2 = a^2+2a+1-a^2$$

$$Area_T = \frac{ab}{2} = \frac{a(\sqrt{2a+1})}{2}.$$

$$a^2+b^2=(a+1)^2$$

$$b^2+\cancel{a^2} = \cancel{a^2}+2a+1$$

$$b^2 = 2a+1$$

$$\frac{b^2-1}{2} = a.$$

$$Area_T = \frac{(b^2-1)b}{2} \div 2$$

$$\boxed{A_T = \frac{b^3-b}{4}}$$

$\boxed{69.C}$

70. $x^2+y^2-4x+6y+K=0$

$$x^2-4x + y^2+6y + K = \cancel{0}$$

$$x^2-4x+4+y^2+6y+9+K = 4+9$$

$$(x-2)^2+(y+3)^2 = 13-K \qquad \text{con } K = 12\ldots$$

$$\boxed{(x-2)^2+(y+3)^2 = 1}$$ Circunferencia de radio 1

$\boxed{70. A}$

71. A. $(f+g)(2)>0$. $\therefore f(2)+g(2)>0$ pero... $f(2)<0 \wedge g(2)<0$

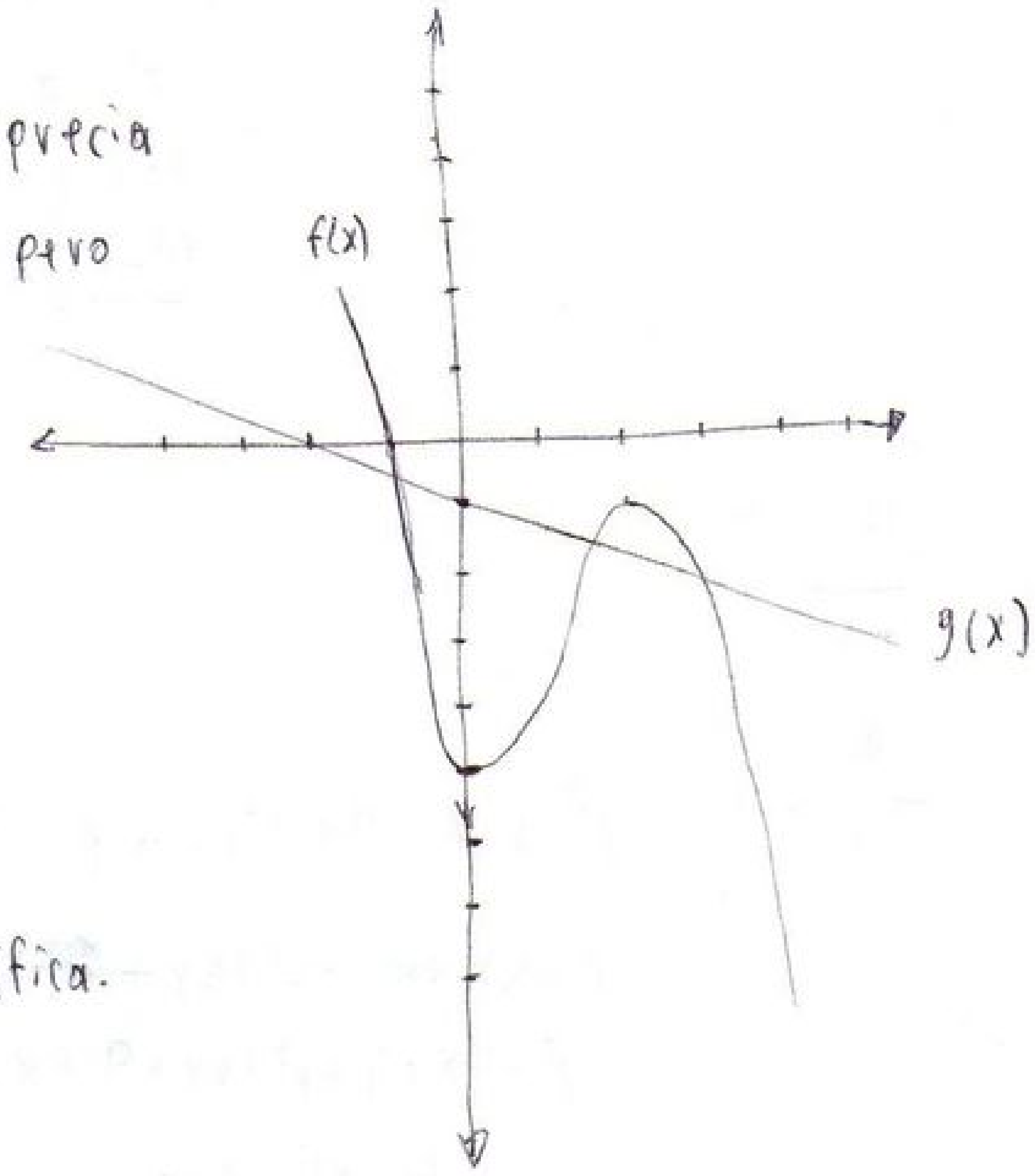
por lo que $f(2)+g(2)<\emptyset$.

A. FALSO

B. $(f-g)(x)=\emptyset$ para dos valores negativos de x

$f(x)-g(x)=\emptyset \quad x<\emptyset$

$f(x)=g(x)$. En la gráfica se aprecia que $f(x)=g(x)$ en tres puntos, pero solo uno de ellos cumple que $x<\emptyset$.



B. FALSO

C. $\left(\frac{f}{g}\right)(0)$ no está definida.

está definida si $g(0)\neq 0$.
esto se puede apreciar en la gráfica.
$g(0)\cong -1$.

C. FALSO

D. $(f\circ g)(-1)>0$

$f(g(-1)) = f(m\cdot(-1)+b)$ $\qquad \underbrace{b\cong -1}, \quad m\cong -\frac{1}{2}$

$= f(-m+b)$

$= f(-\frac{1}{2}-1) = f(-1.5)$

$= f(-\frac{3}{2})$ En la gráfica se aprecia que para $x<1$; $f(x)>0$.

$f(-3/2)>0$.

D. VERDADERO

$\boxed{71.D}$