

SOLUCIONARIO DE LA SECCIÓN DE MATEMÁTICAS DE EXÁMENES DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA 2005-2010

He tenido la suerte de pasar a la Nacho (Nombre que da el vulgo a la Magnánima Universidad Nacional de Colombia) la primera vez que me presenté. Pero por cuestiones vocacionales me retiré de ingeniería de sistemas para presentarme a medicina. Pues la medicina china me encanta...

En fin... Este proyecto nace por necesidad. La necesidad de retribuir lo que se me ha otorgado y de estudiar para el nuevo examen de admisión. Gracias a [www.pasaralaunacional.com](http://www.pasaralaunacional.com) y a Cristian Hernández por publicar los exámenes de 2005 a 2010 y por solucionar los de los últimos años, respectivamente.

Este es un gesto de agradecimiento que espero le sirva a mucha gente. Siempre he sido ~~no tan~~ ~~male~~ medianamente bueno en matemáticas, y la ventaja de que sea matemáticas y no literatura o sociales es que se puede estar más seguro de las respuestas sin temor a la "interpretación subjetiva del sentido de tal o cual palabra..."

La mayoría de ejercicios están resueltos, algunos tienen una que otra demostración... Pero sólo algunos... Cuando me he equivocado en algún ejercicio y la equivocación no ha sido tan infantil, he dejado la huella del error para no caer en el mismo.

Si encuentra alguna errata, señor lector, por favor escríbame a [kamiluelgenial@hotmail.com](mailto:kamiluelgenial@hotmail.com) : se lo agradeceré infinitamente.

La idea del solucionario es ver el examen, que lo pueden descargar en <http://www.descargas.pasaralaunacional.com/estructura-y-respuestas-de-los-examenes-de-admision-de-la-unal>

e ir resolviendo cada problema. Es decir, ver el solucionario y el examen al mismo tiempo...

Por fin el proyecto está terminado...

Algunos símbolos que usé en la solución del examen (si no se entiende alguno, pregúntenme...)

Algunos símbolos usados:

$\doteq$  → "lo que equivale a decir"  
 $\in$  → "pertenecer a"  
 $|$  → "tal que"  
 $\wedge$  → "y"  
 $\emptyset$  → "cero"

$\forall$  → Para todo  
 $\exists$  → Existe un  
 $\Rightarrow$  → Entonces  
 $\forall$  → "o"  
 $\forall$  → tachón  
forma 2

$\cong$  → tachón  
 $\cong$  → "congruente"  
 $\mathbb{R}$  → Números reales  
 $\mathbb{Z}$  → Números enteros  
 $0$  → cero

¡QUE COMIENCE LA FIESTA!

Camilo Alberto Pinzón Galvis

69. Al escribir  $4 \log x + \frac{1}{2} \log(x+1)$  como un sólo logaritmo...

Recordemos que

$$\log(ab) = \log a + \log b, \text{ y que } \log a^m = m \log a.$$

Entonces:

$$\log x^4 + \log (x+1)^{1/2} = \log x^4 + \log \sqrt{x+1} = \boxed{\log(x^4 \cdot \sqrt{x+1})}$$

69.C

70. Hay  $n$  estudiantes. el  $r\%$  practican deporte. los que NO practican deporte son:

$$n \cdot \left(\frac{100-r}{100}\right) = \frac{n(100-r)}{100} \text{ pues el } r \text{ es un número entre } 0 < r < 100. \text{ por lo cual } 0 < 100-r < 100.$$

$$0 < \frac{100-r}{100} < 1$$

70.A

71. El clásico problema de Máximo Común Divisor...

A	B	
900	825	3
300	275	5
60	55	5
12	11	

} 25 } 75.

Puede distribuir de 12 computadores A y 11 computadores B a 75 compañías.

71.D

72. El número de lados =  $n$ , es igual al número de diagonales =  $m$  más tres.  $n = m + 3$   
 $n = 12 + 3 \therefore n = 15.$

72.D

73.  $x^2 - 2\sqrt{5}x + c = 0$  tiene soluciones reales si:  $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$  es un número real.

$$\sqrt{b^2 - 4ac} \geq 0 \therefore \sqrt{(2\sqrt{5})^2 - 4 \cdot 1 \cdot c} \geq 0 \therefore \sqrt{4 \cdot 5 - 4c} \geq 0$$

$$\sqrt{20 - 4c} \geq 0 \therefore 20 - 4c \geq 0 \therefore 4c \leq 20$$

$$\therefore \boxed{c \leq 5}$$

73.C

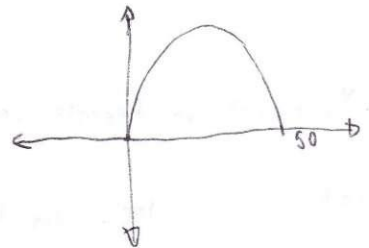
74. El procedimiento permite determinar todas las soluciones, teniendo en cuenta que  $a \neq 0$ .

**74.A**

75.  $y = ax^2 + bx$ .  $x=0, y=0$   $\wedge$   $x=50, y=0$ .

$y = x(ax+b)$

$a$  determina hacia donde abre la parábola.  $a < 0$



Supongamos  $a = -1$ .

$y = x(-ax+b) = x(-x+b)$

Cómo en  $x=50, y=0$ .

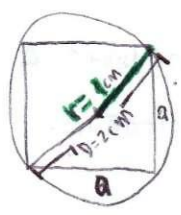
$y = x(-x+50)$

$b > 0 \wedge a < 0$

$a$  es negativo y  $b$  es positivo.

**75.C**

76.

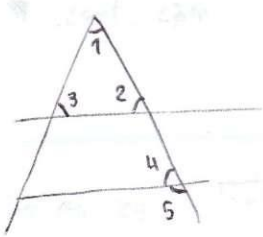


$2r = D = 2cm$   $D^2 = a^2 + a^2 \therefore 2^2 = 2a^2 \therefore 2 = a^2 \therefore a = \sqrt{2}$

$A_c = \text{Area del cuadrado} = A_c = a \cdot a = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$ .

**76.C**

77.



$\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = 60^\circ$

$\angle 4 = \angle 2 = 60^\circ$

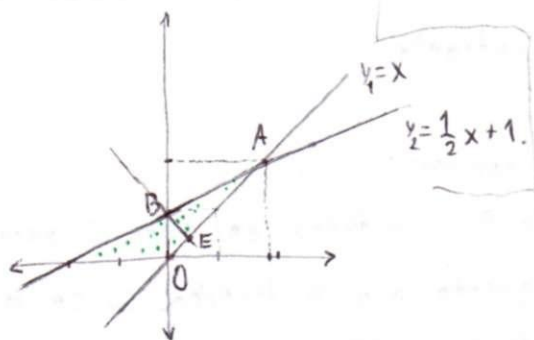
$\angle 5 = 180^\circ - \angle 4 = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

**$\angle 5 = 120^\circ$**

**77.B**

78.  $y = x$  y  $y = \frac{1}{2}x + 1$ .

Primer método: trigonometría.



$$OA^2 = 2^2 + 2^2 = 8$$

$$OA = 2\sqrt{2}$$

Encontrar una recta perpendicular que pase por  $(0, 1)$ .  $y_3 \perp y_2$

$(-2, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(0, 0) = T_1$ .  $A_{T_1} = \frac{2 \cdot 1}{2} = 1$ .

$B(0, 1)$ ,  $(2, 2)$ ,  $A$ ,  $O(0, 0) = T_2$ .  $A_{T_2} = 1$ .

$$y_3 = -x + 1$$

$y_3$  y  $y_2$  se cortan en...

$$y_3\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$y_3 = y_1 \therefore -x + 1 = x \therefore 2x = 1$$

$$x = \frac{1}{2}$$

$$EB = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$A_{T_2} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 2\sqrt{2}}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$A_{\text{Total}} = A_{T_2} + A_{T_1} = 1 + 1 = 2$$

$$A_{\text{Total}} = 2$$

Segundo método: Cálculo integral.

$$x = y_1$$

$$y_2 = \frac{1}{2}x + 1 \therefore y_2 - 1 = \frac{1}{2}x \therefore 2y_2 - 2 = x$$

Haciendo la integral entre 0 y 2 de la gráfica de la derecha  $x = y$  menos la de la izquierda  $x = 2y - 2$ ...

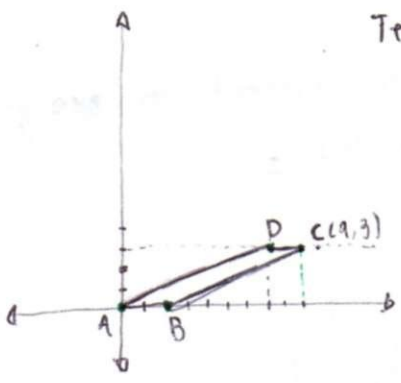
$$\int_0^2 y - (2y - 2) dy = \int_0^2 (y - 2y + 2) dy = \int_0^2 (-y + 2) dy = \int_0^2 (2 - y) dy = 2y - \frac{y^2}{2} \Big|_0^2 = 2 \cdot 2 - \frac{2^2}{2} = 4 - 2 = 2 = A$$

78.A

$$A_{\text{Total}} = 2$$

79. A: (0,0) ; B: (2,0) y D(7,3).

C: ? tal que ABCD es un paralelogramo.  
en primer cuadrante.

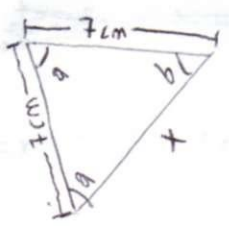


Tenemos, básicamente, 2 opciones:

mover el punto D 2 unidades en dirección paralela a AB, hacia la izquierda o a la derecha. Si se mueve a la izquierda, se forma C(5,3), que no aparece en las respuestas. Si se mueve a la derecha, se forma C(9,3), que aparece en las respuestas. Se podrían formar otros paralelogramos pero en otros cuadrantes...

79.C

80.



A ángulos iguales se oponen lados iguales. Como

$$\angle a = \angle a, x = 7 \text{ cm.}$$

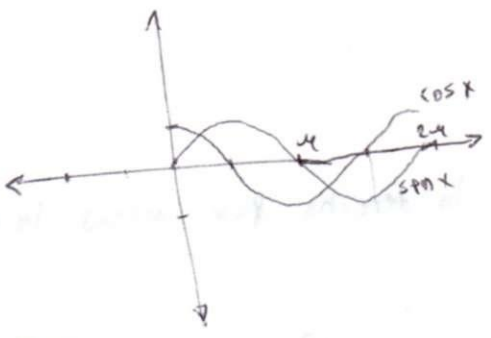
Como los lados del triángulo son todos iguales, sus ángulos también lo son:

$$\angle b = \angle a = 60^\circ.$$

$$x = 7 \text{ cm } \angle b = 60^\circ$$

80.B

81. El menor entero positivo n, tal que  $\sin(60 + 90n)^\circ = \cos 60^\circ$  es:



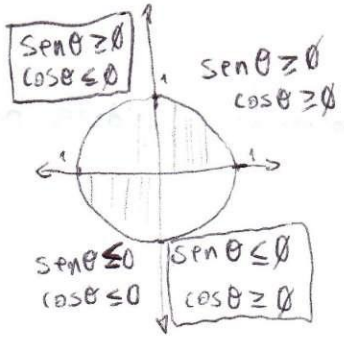
Se puede ver claramente que

$$\cos \theta = \sin(\theta + 90^\circ) \quad \forall \theta \in \mathbb{R}$$

Por lo cual el menor entero positivo que cumple dicha condición es  $n=1$ .

81.A

82. Si  $\theta$  satisface  $\text{sen } \theta = -\text{cos } \theta \Rightarrow ?$



entonces  $\text{sen } \theta$  y  $\text{cos } \theta$  deben tener diferente signo, es decir,  $\theta$  es un ángulo de segundo o cuarto cuadrante.

Como esta respuesta no se encuentra y las otras son falsas, la pregunta es:

82. Inconsistente

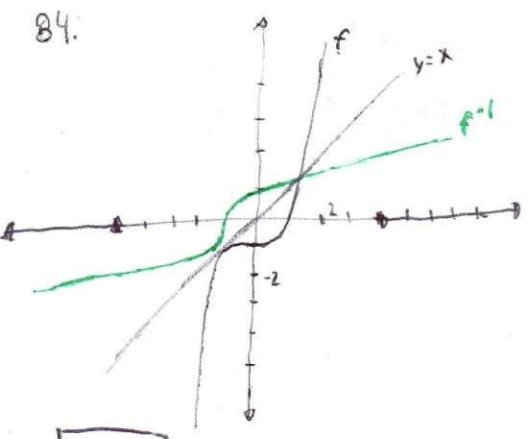
83.  $N(t) = 1000 \cos \frac{\pi}{5}t + 4000 \quad 0 \leq t \leq 10$

$N(t) > 4000$  si  $\cos \frac{\pi}{5}t > 0$        $0 \leq \frac{\pi}{5}t < \frac{\pi}{2}$        $\wedge$        $\frac{3\pi}{2} < \frac{\pi}{5}t \leq 2\pi$

$0 \leq t < \frac{5}{2}$        $\wedge$        $\frac{15}{2} < t \leq 10$

83.C

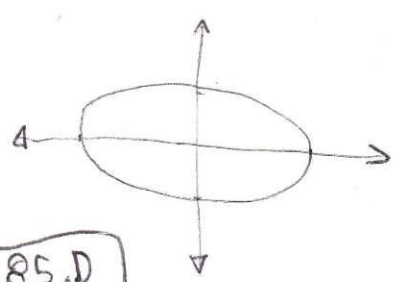
84.



Para obtener la inversa, se refleja la función original respecto a la recta  $y=x$

84.C

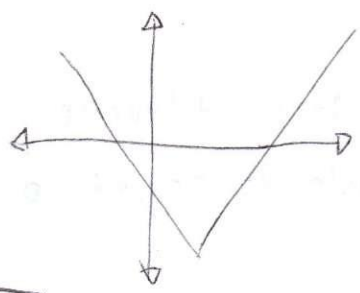
85.



85.D

La gráfica de  $x^2 + y^2 = 1$  corresponde a un círculo de radio 1. Se puede observar que el valor de  $x$  en esta gráfica aumenta, por lo que podríamos afirmar que la escala del eje  $x$  es el doble de la del eje  $y$ .

86.



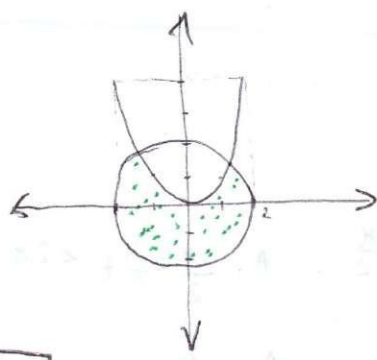
La gráfica corresponde a una ecuación de la forma

$$y = |ax + b| + c; c < 0,$$

pues es un valor absoluto pero corrido c unidades hacia abajo.

86.A

87.



La región sombreada está descrita por:

$$y \leq x^2 \wedge x^2 + y^2 \leq 4$$

$$\{(x,y) | y \leq x^2\} \cap \{(x,y) | x^2 + y^2 \leq 4\}$$

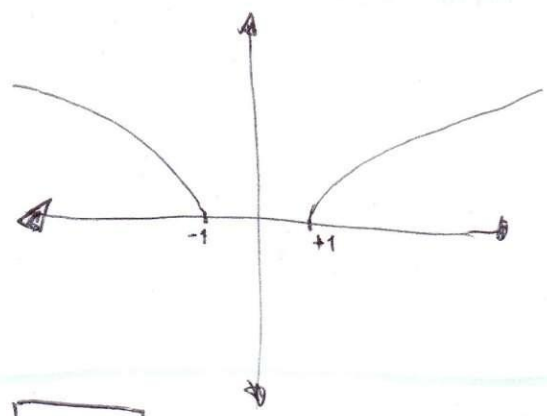
87.D

88.

$$g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$$

$$x^2 - 1 \geq 0 \therefore x^2 \geq 1$$

$$\therefore x \geq \sqrt{1} \therefore -1 \leq x \leq 1$$



88.A