

SOLUCIONARIO DE LA SECCIÓN DE MATEMÁTICAS DE EXÁMENES DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA 2005-2010

He tenido la suerte de pasar a la Nacho (Nombre que da el vulgo a la Magnánima Universidad Nacional de Colombia) la primera vez que me presenté. Pero por cuestiones vocacionales me retiré de ingeniería de sistemas para presentarme a medicina. Pues la medicina china me encanta...

En fin... Este proyecto nace por necesidad. La necesidad de retribuir lo que se me ha otorgado y de estudiar para el nuevo examen de admisión. Gracias a www.pasaralaunacional.com y a Cristian Hernández por publicar los exámenes de 2005 a 2010 y por solucionar los de los últimos años, respectivamente.

Este es un gesto de agradecimiento que espero le sirva a mucha gente. Siempre he sido ~~no tan~~ ~~male~~ medianamente bueno en matemáticas, y la ventaja de que sea matemáticas y no literatura o sociales es que se puede estar más seguro de las respuestas sin temor a la "interpretación subjetiva del sentido de tal o cual palabra..."

La mayoría de ejercicios están resueltos, algunos tienen una que otra demostración... Pero sólo algunos... Cuando me he equivocado en algún ejercicio y la equivocación no ha sido tan infantil, he dejado la huella del error para no caer en el mismo.

Si encuentra alguna errata, señor lector, por favor escríbame a kamilioelgenial@hotmail.com : se lo agradeceré infinitamente.

La idea del solucionario es ver el examen, que lo pueden descargar en <http://www.descargas.pasaralaunacional.com/estructura-y-respuestas-de-los-examenes-de-admision-de-la-unal>

e ir resolviendo cada problema. Es decir, ver el solucionario y el examen al mismo tiempo...

Por fin el proyecto está terminado...

Algunos símbolos que usé en la solución del examen (si no se entiende alguno, pregúntenme...)

Algunos símbolos usados:

\doteq → "lo que equivale a decir"
 \in → "pertenecer a"
 $|$ → "tal que"
 \wedge → "y"
 \emptyset → "cero"

\forall → Para todo
 \exists → Existe un
 \Rightarrow → Entonces
 \forall → "o"
 \forall → tachón
forma 2

\bullet → tachón
 \cong → "congruente"
 \mathbb{R} → Números reales
 \mathbb{Z} → Números enteros
 0 → cero

¡QUE COMIENCE LA FIESTA!

Camilo Alberto Pinzón Galvis

69. Al escribir $4 \log x + \frac{1}{2} \log(x+1)$ como un sólo logaritmo...

Recordemos que

$$\log(ab) = \log a + \log b, \text{ y que } \log a^m = m \log a.$$

Entonces:

$$\log x^4 + \log (x+1)^{1/2} = \log x^4 + \log \sqrt{x+1} = \boxed{\log(x^4 \cdot \sqrt{x+1})}$$

69.C

70. Hay n estudiantes. el $r\%$ practican deporte. los que NO practican deporte son:

$$n \cdot \left(\frac{100-r}{100}\right) = \frac{n(100-r)}{100} \text{ pues el } r \text{ es un número entre } 0 < r < 100. \text{ por lo cual } 0 < 100-r < 100.$$

$$0 < \frac{100-r}{100} < 1$$

70.A

71. El clásico problema de Máximo Común Divisor...

A	B	900	825	3	} 25 } 75.
		300	275	5	
		60	55	5	
		12	11		

Puede distribuir de 12 computadores A y 11 computadores B a 75 compañías.

71.D

72. El número de lados = n , es igual al número de diagonales = m más tres. $n = m + 3$
 $n = 12 + 3 \therefore n = 15.$

72.D

73. $x^2 - 2\sqrt{5}x + c = 0$ tiene soluciones reales si: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ es un número real.

$$\sqrt{b^2 - 4ac} \geq 0 \therefore \sqrt{(2\sqrt{5})^2 - 4 \cdot 1 \cdot c} \geq 0 \therefore \sqrt{4 \cdot 5 - 4c} \geq 0$$

$$\sqrt{20 - 4c} \geq 0 \therefore 20 - 4c \geq 0 \therefore 4c \leq 20$$

$$\therefore \boxed{c \leq 5}$$

73.C

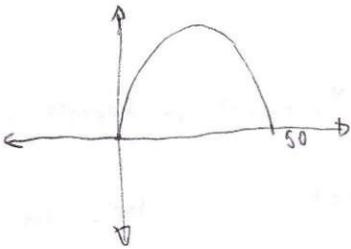
74. El procedimiento permite determinar todas las soluciones, teniendo en cuenta que $a \neq 0$.

74.A

75. $y = ax^2 + bx$. $x=0, y=0$ \wedge $x=50, y=0$.

$$y = x(ax+b)$$

a determina hacia donde abre la parábola. $a < 0$



Supongamos $a = -1$.

$$y = x(-ax+b) = x(-x+b)$$

Cómo en $x=50, y=0$.

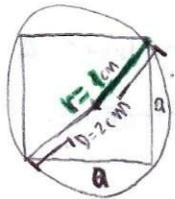
$$y = x(-x+50)$$

$b > 0 \wedge a < 0$

a es negativo y b es positivo.

75.C

76.

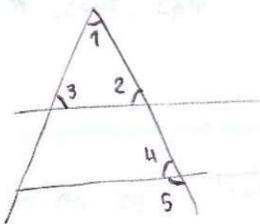


$$2r = D = 2\text{cm} \quad D^2 = a^2 + a^2 \quad \therefore 2^2 = 2a^2 \quad \therefore 2 = a^2 \quad \therefore a = \sqrt{2}$$

$$A_c = \text{Area del cuadrado} = A_c = a \cdot a = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2.$$

76.C

77.



$$\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = 60^\circ$$

$$\angle 4 = \angle 2 = 60^\circ$$

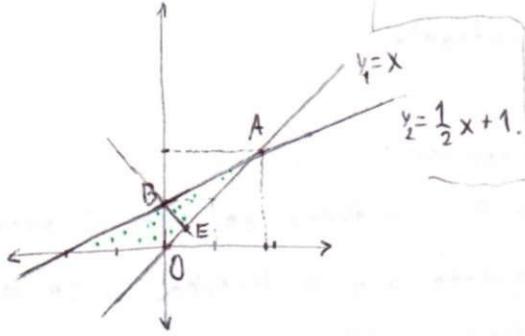
$$\angle 5 = 180^\circ - \angle 4 = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

$$\angle 5 = 120^\circ$$

77.B

78. $y = x$ y $y = \frac{1}{2}x + 1$.

Primer método: trigonometría.



$$OA^2 = 2^2 + 2^2 = 8$$

$$OA = 2\sqrt{2}$$

Encontrar una recta perpendicular que pase por (0, 1). $y_3 \perp y_2$

$(-2, 0)$ $(0, 1)$ $(0, 0) = T_1$. $A_{T_1} = \frac{2 \cdot 1}{2} = 1$.

$B(0, 1)$ $(2, 2) = T_2$. $A_{T_2} = 1$.

$$y_3 = -x + 1$$

y_3 y y_2 se cortan en...

$$y_3\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$y_3 = y_1 \therefore -x + 1 = x \therefore 2x = 1$$

$$x = \frac{1}{2}$$

$$EB = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$A_{T_2} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 2\sqrt{2}}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$A_{\text{Total}} = A_{T_2} + A_{T_1} = 1 + 1 = 2$$

$$A_{\text{Total}} = 2$$

Segundo método: Cálculo integral.

$$x = y_1$$

$$y_2 = \frac{1}{2}x + 1 \therefore y_2 - 1 = \frac{1}{2}x \therefore 2y_2 - 2 = x$$

Haciendo la integral entre 0 y 2 de la gráfica de la derecha $x = y$ menos la de la izquierda $x = 2y - 2$...

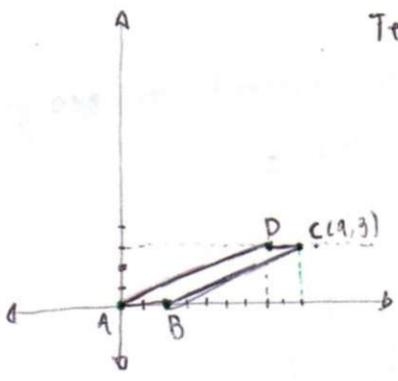
$$\int_0^2 y - (2y - 2) dy = \int_0^2 (y - 2y + 2) dy = \int_0^2 (-y + 2) dy = \int_0^2 (2 - y) dy = 2y - \frac{y^2}{2} \Big|_0^2 = 2 \cdot 2 - \frac{2^2}{2} = 4 - 2 = 2 = A$$

$$78.A$$

$$A_{\text{Total}} = 2$$

79. A: (0,0) ; B: (2,0) y D(7,3).

C: ? tal que ABCD es un paralelogramo.
 en primer cuadrante.

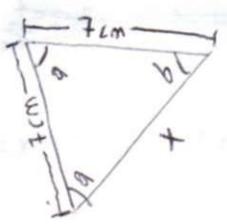


Tenemos, básicamente, 2 opciones:

mover el punto D 2 unidades en dirección paralela a AB, hacia la izquierda o a la derecha. Si se mueve a la izquierda, se forma C(5,3), que no aparece en las respuestas. Si se mueve a la derecha, se forma C(9,3), que aparece en las respuestas. Se podrían formar otros paralelogramos pero en otros cuadrantes...

79.C

80.



A ángulos iguales se oponen lados iguales. Como

$$\angle a = \angle a, \quad x = 7 \text{ cm.}$$

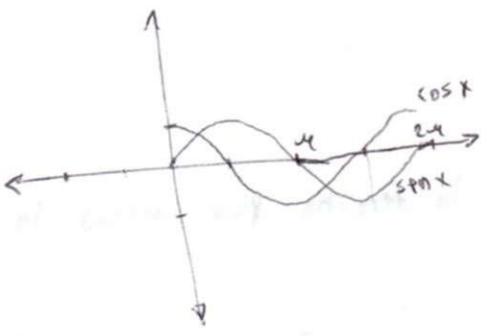
Como los lados del triángulo son todos iguales, sus ángulos también lo son:

$$\angle b = \angle a = 60^\circ.$$

$x = 7 \text{ cm} \quad \angle b = 60^\circ$

80.B

81. El menor entero positivo n, tal que $\sin(60 + 90n)^\circ = \cos 60^\circ$ es:

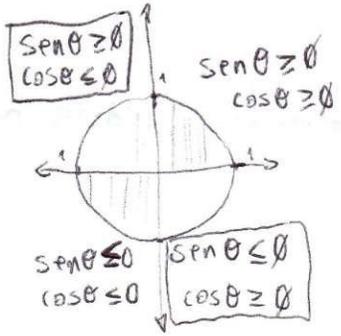


Se puede ver claramente que
 $\cos \theta = \sin(\theta + 90^\circ) \quad \forall \theta \in \mathbb{R}$

Por lo cual el menor entero positivo que cumple dicha condición es $n=1$.

81.A

82. Si θ satisface $\text{sen } \theta = -\text{cos } \theta \Rightarrow ?$



entonces $\text{sen } \theta$ y $\text{cos } \theta$ deben tener diferente signo, es decir, θ es un ángulo de segundo o cuarto cuadrante.

Como esta respuesta no se encuentra y las otras son falsas, la pregunta es:

82. Inconsistente

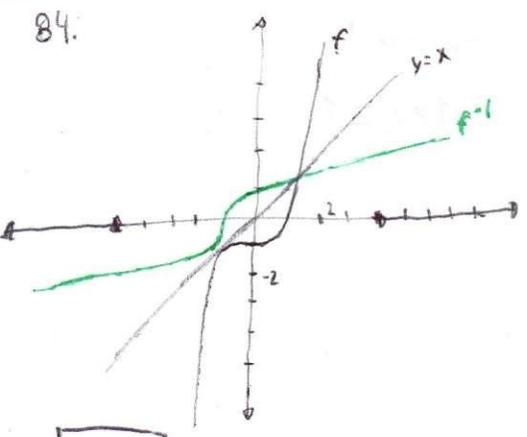
83. $N(t) = 1000 \cos \frac{\pi}{5}t + 4000 \quad 0 \leq t \leq 10$

$N(t) > 4000$ si $\cos \frac{\pi}{5}t > 0$ $0 \leq \frac{\pi t}{5} < \frac{\pi}{2}$ \wedge $\frac{3\pi}{2} < \frac{\pi}{5}t \leq 2\pi$

$0 \leq t < \frac{5}{2}$ \wedge $\frac{15}{2} < t \leq 10$

83.C

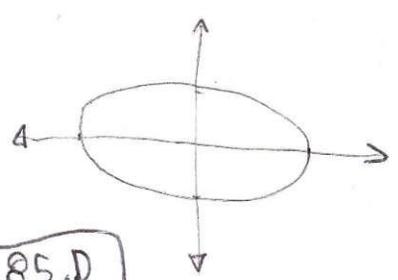
84.



Para obtener la inversa, se refleja la función original respecto a la recta $y=x$

84.C

85.

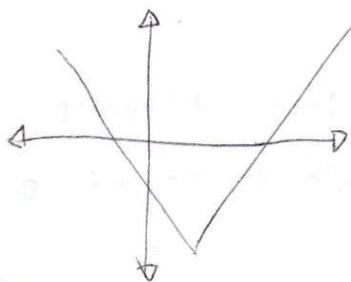


La gráfica de $x^2 + y^2 = 1$ corresponde a un círculo de radio 1.

Se puede observar que el valor de x en esta gráfica aumenta, por lo que podríamos afirmar que la escala del eje x es el doble de la del eje y .

85.D

86.



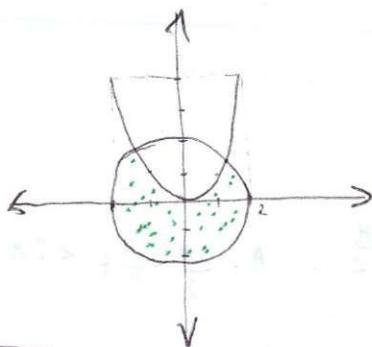
La gráfica corresponde a una ecuación de la forma

$$y = |ax + b| + c ; c < 0 ,$$

pues es un valor absoluto pero corrido c unidades hacia abajo.

86.A

87.



La región sombreada está descrita por:

$$y \leq x^2 \wedge x^2 + y^2 \leq 4$$

$$\{(x,y) \mid y \leq x^2\} \cap \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$$

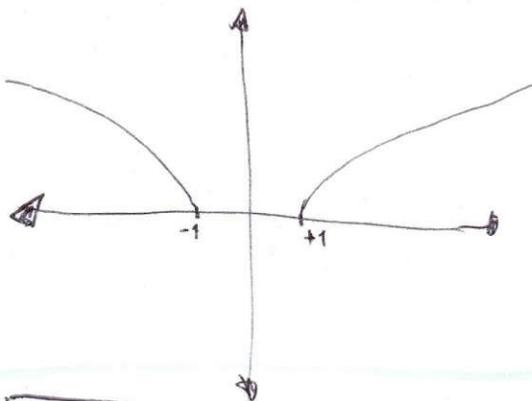
87.D

88.

$$g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$$

$$x^2 - 1 \geq 0 \therefore x^2 \geq 1$$

$$\therefore x \geq \sqrt{1} \therefore -1 \leq x \leq 1$$



88.A