SOLUCIONARIO DE LA SECCIÓN DE MATEMÁTICAS DE EXÁMENES DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA 2005-2010

He tenido la suerte de pasar a la Nacho (Nombre que da el vulgo a la Magnánima Universidad Nacional de Colombia) la primera vez que me presenté. Pero por cuestiones vocacionales me retiré de ingeniería de sistemas para presentarme a medicina. Pues la medicina china me encanta…

En fin… Este proyecto nace por necesidad. La necesidad de retribuir lo que se me ha otorgado y de estudiar para el nuevo examen de admisión. Gracias a www.pasaralaunacional.com y a Cristian Hernández por publicar los exámenes de 2005 a 2010 y por solucionar los de los últimos años, respectivamente.

Este es un gesto de agradecimiento que espero le sirva a mucha gente. Siempre he sido ~~no tan malo~~ medianamente bueno en matemáticas, y la ventaja de que sea matemáticas y no literatura o sociales es que se puede estar más seguro de las respuestas sin temor a la “interpretación subjetiva del sentido de tal o cual palabra…”

La mayoría de ejercicios están resueltos, algunos tienen una que otra demostración… Pero sólo algunos… Cuando me he equivocado en algún ejercicio y la equivocación no ha sido tan infantil, he dejado la huella del error para no caer en el mismo.

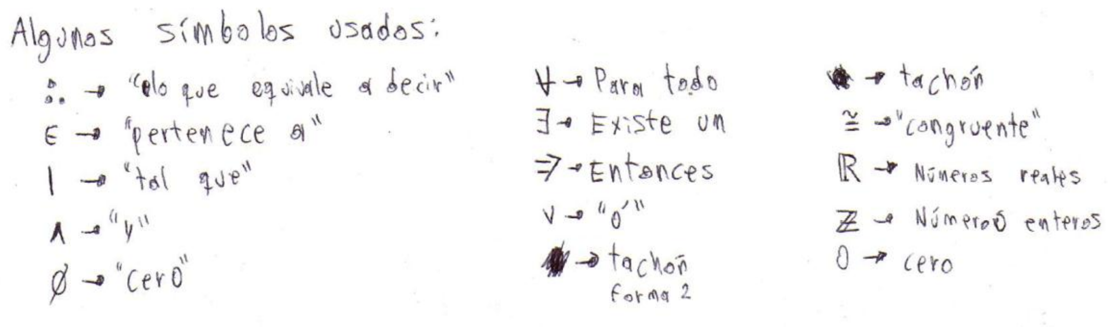
Si encuentra alguna errata, señor lector, por favor escríbame a kamiloelgenial@hotmail.com : se lo agradeceré infinitamente.

La idea del solucionario es ver el examen, que lo pueden descargar en http://www.descargas.pasaralaunacional.com/estructura-y-respuestas-de-los-examenes-de-admision-de-la-unal

e ir resolviendo cada problema. Es decir, ver el solucionario y el examen al mismo tiempo…

Por fin el proyecto está terminado…

Algunos símbolos que usé en la solución del examen (si no se entiende alguno, pregúntenme…)



¡QUE COMIENCE LA FIESTA!

Camilo Alberto Pinzón Galvis

69. Al escribir $4\log x + \frac{1}{2}\log(x+1)$ como un sólo logaritmo...

Recordemos que

$$\log(ab) = \log a + \log b \text{ , y que } \log a^m = m\log a.$$

Entonces:

$$\log x^4 + \log(x+1)^{1/2} = \log x^4 + \log\sqrt{x+1} = \boxed{\log\left(x^4 \cdot \sqrt{x+1}\right)}$$

$\boxed{69. C}$

---

70. Hay n estudiantes. el r% practican deporte. los que NO practican deporte son:

$$n \cdot \left(\frac{100-r}{100}\right) = \frac{n(100-r)}{100}$$ pues el r es un número entre $0 < r < 100$. por lo cual $\emptyset < 100 - r < 100$.

$$\boxed{0 < \frac{100-r}{100} < 1}$$

$\boxed{70. A}$

---

71. El clásico problema de Máximo Común Divisor...

A	B	
900	825	3
300	275	5
60	55	5
12	11	

$3 \cdot \underbrace{5 \cdot 5}_{25} = 75.$

Puede distribuir de 12 computadores A y 11 computadores B a 75 compañias.

$\boxed{71. D}$

---

72. El número de lados $= n$, es igual al número de diagonales de un vertice $= m$ más tres. $n = m + 3$

$n = 12 + 3 \therefore n = 15.$

$\boxed{72. D}$

---

73. $x^2 - 2\sqrt{5}\,x + c = \emptyset$. tiene soluciones reales si: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ es un número real.

$$\sqrt{b^2 - 4ac} \geq \emptyset \therefore \sqrt{(2\sqrt{5})^2 - 4 \cdot 1 \cdot c} \geq \emptyset \therefore \sqrt{4 \cdot 5 - 4c} \geq \emptyset$$

$$\sqrt{20 - 4c} \geq 0 \therefore 20 - 4c \geq 0 \therefore 4c \leq 20$$

$$\therefore \boxed{c \leq 5}$$

$\boxed{73. C}$

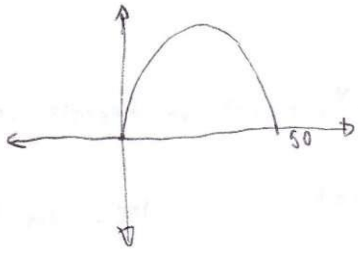
74. El procedimiento permite determinar todas las soluciones, teniendo en cuenta que $a \neq 0$.

$\boxed{74.A}$

75. $y = ax^2 + bx$. $x = 0, y = 0 \wedge x = 50, y = 0$.

$\boxed{\text{a determina hacia donde abre la parábola. } a<0}$

$y = x(ax+b)$



Supongamos $a = -1$.

$y = x(-ax+b) = x(-x+b)$

Cómo en $x = 50, y = 0$..

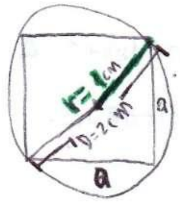
$y = x(-x+50)$

$b > 0 \wedge a < 0$

a es negativo y b es positivo.

$\boxed{75.C}$

76.

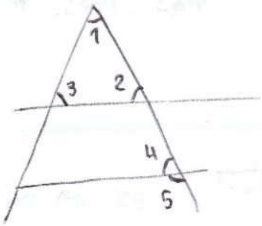


$2r = D = 2cm \quad D^2 = a^2 + a^2 \therefore 2^2 = 2a^2 \therefore 2 = a^2 \therefore a = \sqrt{2}$

A_c = Area del cuadrado = $A_c = a.a = \sqrt{2}.\sqrt{2} = 2$.

$\boxed{76.C}$

77.



$\measuredangle 1 = \measuredangle 2 = \measuredangle 3 = 60^\circ$

$\measuredangle 4 = \measuredangle 2 = 60^\circ$

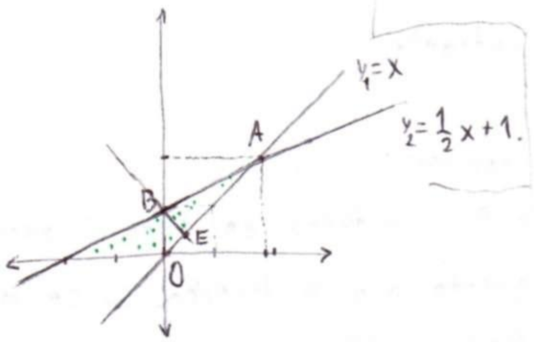
$\measuredangle 5 = 180^\circ - \measuredangle 4 = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

$\boxed{\measuredangle 5 = 120^\circ}$

$\boxed{77.B}$

78. $y = x \wedge y = \frac{1}{2}x + 1.$

Primer método: trigonometría.

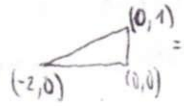


$OA^2 = 2^2 + 2^2 = 8$

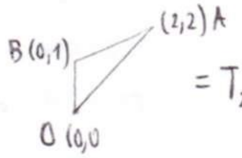
$\boxed{OA = 2\sqrt{2}}$

Encontrar una recta perpendicular que pase por $(0,1)$. $y_3 \perp y_1$

$y_1 = x$



$= T_1.$ $A_{T_1} = \frac{2.1}{2} = 1.$



$= T_2.$ $A_{T_2} = 1.$

$\boxed{y_3 = -x + 1}$

$y_3 \wedge y_1$ se cortan en...

$y_3 = y_1 \therefore -x+1 = x \therefore 2x = 1$

$\boxed{x = \frac{1}{2}}$

$y_3\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} + 1 = \boxed{\frac{1}{2}}$

$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$

$EB = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$A_{T_2} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 2\sqrt{2}}{2} = \frac{2}{2} = 1.$

$\boxed{A_{Total} = A_{T_2} + A_{T_1} = 1 + 1 = 2}$ $\boxed{A_{Total} = 2}$

Segundo método: Cálculo integral.

$x = y_1$

$y_2 = \frac{1}{2}x + 1 \therefore y_2 - 1 = \frac{1}{2}x \therefore 2y_2 - 2 = x.$

Haciendo la integral entre 0 y 2 de la gráfica de la derecha $x = y$ menos la de la izquierda $x = 2y - 2$...

$\int_0^2 y - (2y-2)\,dy = \int_0^2 (y - 2y + 2)\,dy = \int_0^2 (-y+2)\,dy = \int_0^2 (2-y)\,dy = 2y - \frac{y^2}{2}\Big|_0^2 = 2.2 - \frac{2^2}{2} = 4 - 2 = \boxed{2 = A}$

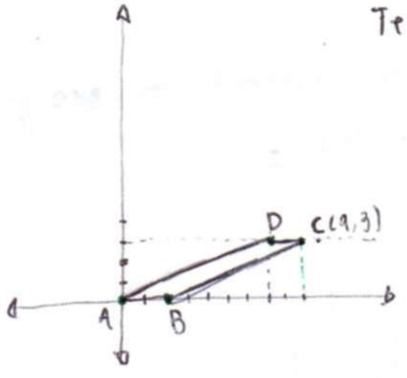
$\boxed{78.A}$

$\boxed{A_{Total} = 2}$

79. $A:(0,0)$; $B:(2,0)$ $\wedge$ $D(7,3)$.

$C: ?$ tal que $ABCD$ es un paralelogramo.

$C \in$ primer cuadrante.

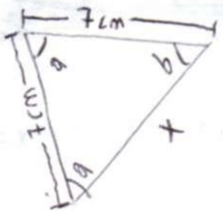


Tenemos, básicamente, 2 opciones:

mover el punto D 2 unidades en dirección paralela a AB, hacia la izquierda o a la derecha. Si se mueve a la izquierda, se forma $C:(5,3)$, que no aparece en las respuestas. Si se mueve a la derecha, se forma $C(9,3)$, que aparece en las respuestas. Se podrían formar otros paralelogramos pero en otros cuadrantes...

$\boxed{79.C}$

80.



A angulos iguales se oponen lados iguales. Como

$\measuredangle a = \measuredangle a$, $x = 7cm$.

Como los lados del triangulo son todos iguales, sus angulos tambien lo son:

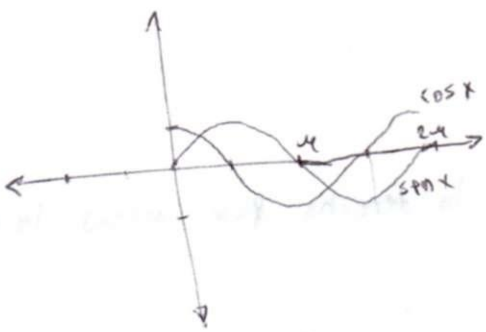
$\measuredangle b = \measuredangle a = 60°$.

$\boxed{80.B}$

$\boxed{X = 7cm \quad \measuredangle b = 60°}$

---

81. El menor entero positivo n. tal que $\text{sen}(60+90n)° = \cos 60°$ es:



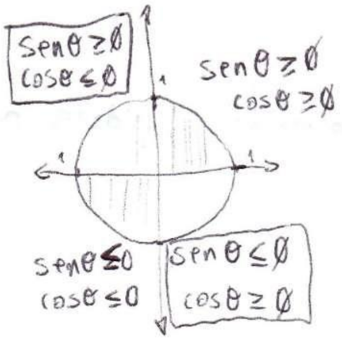
Se puede ver claramente que

$$\cos\theta = \text{sen}(\theta + 90°) \quad \forall\theta \in \mathbb{R}$$

Por lo cual el menor entero positivo que cumple dicha condición es $n=1$.

$\boxed{81.A}$

82. Si θ satisface $\operatorname{sen}\theta = -\cos\theta \Rightarrow$!



entonces $\operatorname{sen}\theta$ y $\cos\theta$ deben tener diferente signo, es decir, θ es un ángulo de segundo o cuarto cuadrante.

Cómo esta respuesta no se encuentra y las otras son falsas, la pregunta es:

$\boxed{\text{82. Inconsistente}}$

---

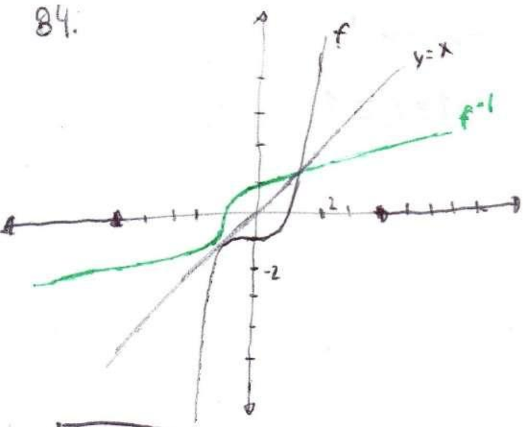
83. $N(t) = 1000\cos\frac{\pi}{5}t + 4000 \quad 0 \le t \le 10$.

$N(t) > 4000$ si $\cos\frac{\pi}{5}t > 0$. $\quad 0 \le \frac{\pi t}{5} < \frac{\pi}{2} \quad \wedge \quad \frac{3\pi}{2} < \frac{\pi}{5}t \le 2\pi$

$\boxed{0 \le t < \frac{5}{2} \quad \wedge \quad \frac{15}{2} < t \le 10}$

$\boxed{\text{83. C}}$

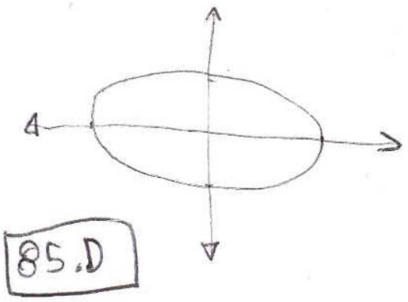
84.



Para obtener la inversa, se refleja la función original respecto a la recta $y=x$

$\boxed{\text{84. C}}$

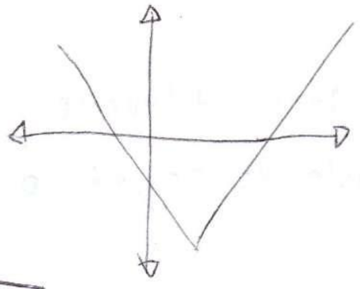
85.



La gráfica de $x^2+y^2=1$ corresponde a un círculo de radio 1.
se puede observar que el valor de x en esta gráfica aumenta, por lo que podríamos afirmar que la escala del eje x es el doble de la del eje y.

$\boxed{\text{85. D}}$

86.



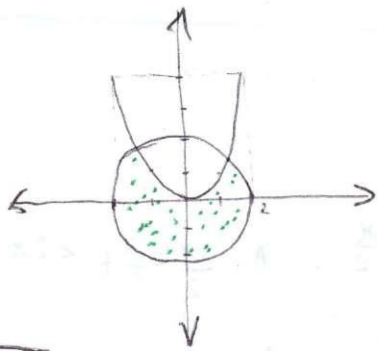
La gráfica corresponde a una ecuación de la forma

$$y = |ax+b| + c \;;\; c<0 \;,$$

pues es un valor absoluto pero corrido c unidades hacia abajo.

$\boxed{86.A}$

87.



La region Sombreada está descrita por:

$$\boxed{y \leq x^2 \quad \wedge \quad x^2+y^2 \leq 4}$$

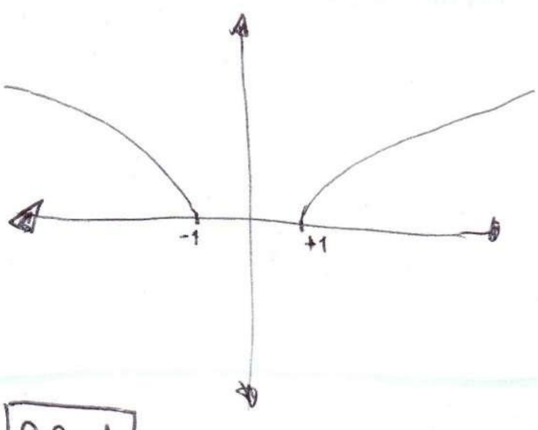
$$\{(x,y) \mid y \leq x^2\} \cap \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 4\}$$

$\boxed{87.D}$

88.

$$g(x) = \sqrt{x^2-1} \qquad x^2-1 \geq 0 \;\therefore\; x^2 \geq 1$$

$$\therefore\; x \geq \pm\sqrt{1} \;\therefore\; -1 \geq x \geq 1$$



$\boxed{88.A}$