

SOLUCIONARIO DE LA SECCIÓN DE MATEMÁTICAS DE EXÁMENES DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA 2006-2010

He tenido la suerte de pasar a la Nacho (Nombre que da el vulgo a la Magnánima Universidad Nacional de Colombia) la primera vez que me presenté. Pero por cuestiones vocacionales me retiré de ingeniería de sistemas para presentarme a medicina. Pues la medicina china me encanta...

En fin... Este proyecto nace por necesidad. La necesidad de retribuir lo que se me ha otorgado y de estudiar para el nuevo examen de admisión. Gracias a www.pasaralaunacional.com y a Cristian Hernández por publicar los exámenes de 2006 a 2010 y por solucionar los de los últimos años, respectivamente.

Este es un gesto de agradecimiento que espero le sirva a mucha gente. Siempre he sido ~~no tan~~ ~~male~~ medianamente bueno en matemáticas, y la ventaja de que sea matemáticas y no literatura o sociales es que se puede estar más seguro de las respuestas sin temor a la "interpretación subjetiva del sentido de tal o cual palabra..."

La mayoría de ejercicios están resueltos, algunos tienen una que otra demostración... Pero sólo algunos... Cuando me he equivocado en algún ejercicio y la equivocación no ha sido tan infantil, he dejado la huella del error para no caer en el mismo.

Si encuentra alguna errata, señor lector, por favor escríbame a kamiluelgenial@hotmail.com : se lo agradeceré infinitamente.

La idea del solucionario es ver el examen, que lo pueden descargar en <http://www.descargas.pasaralaunacional.com/estructura-y-respuestas-de-los-examenes-de-admision-de-la-unal>

e ir resolviendo cada problema.

(El examen 2008-1 aún no está publicado. Espero hacerlo pronto.)

Algunos símbolos que usé en la solución del examen (si no se entiende alguno, pregúntenme...)

Algunos símbolos usados:

$\dot{\cdot}$ → "lo que equivale a decir"
 \in → "pertenecer a"
 $|$ → "tal que"
 \wedge → "y"
 \emptyset → "cero"

\forall → Para todo
 \exists → Existe un
 \Rightarrow → Entonces
 \forall → "o"
 \forall → tachón
forma 2

\bullet → tachón
 \cong → "congruente"
 \mathbb{R} → Números reales
 \mathbb{Z} → Números enteros
 0 → cero

¡QUE COMIENCE LA FIESTA!

Camilo Alberto Pinzón Galvis

48.

A. $-\frac{25}{2}, -7, -\frac{3}{7}, 4, \dots$

$$-7 - \left(-\frac{25}{2}\right) = -7 + \frac{25}{2} = \frac{15}{2} \quad -\frac{25}{2} + \frac{15}{2} = -7.$$

$$-7 + \frac{15}{2} = \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \neq -\frac{3}{7} \quad \text{No está en progresión aritmética.}$$

B. $\frac{2}{3}, 2, \frac{10}{3}, \frac{14}{3}, 6, \dots$

$$\frac{2}{3} + \frac{4}{3} = \frac{6}{3} = 2 \quad \frac{6}{3} + \frac{4}{3} = \frac{10}{3} \quad \frac{10}{3} + \frac{4}{3} = \frac{14}{3} \quad \frac{14}{3} + \frac{4}{3} = \frac{18}{3} = 6.$$

Está en progresión aritmética.

C. $\frac{1}{25}, -\frac{1}{25}, \frac{1}{5}, -1, \dots$

$$-\frac{1}{25} - \frac{1}{25} = -\frac{2}{25} \quad \frac{1}{5} - \frac{2}{25} = \frac{1}{25}$$

$$\frac{1}{5} - \frac{1}{25} = \frac{4}{25}$$

$$\boxed{\frac{4}{25} \neq \frac{1}{5}} \quad \text{NO está en progresión aritmética.}$$

Como se pregunta cual sucesión no está en progresión aritmética y hay por lo menos dos respuestas válidas, la pregunta se invalida.

48. Inconsistente

49.

Número	A. 3	B. 4	C. 5	D. 6
Divisores propios	1	2, 1	1	1, 2, 3
suma:	1	1+2 = 3	1	1+2+3 = 6
Perfecto? Suma = Número	NO	NO	NO	SI.

6 es un ejemplo de número perfecto.

49.D

50. A. si $x \geq -3$, $|x+3| = x+3$. VERDADERO. Pues

$$\boxed{\text{si } x+3 \geq 0 \Rightarrow x \geq -3}$$

B. si $x < 0$, $|x-2| = x-2$ - falso. si $x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$.

$$|x-2| = \begin{cases} x-2 & \text{si } x \geq 2 \\ -x+2 & \text{si } x < 2. \end{cases}$$

C. si $x \in \mathbb{R}$, $|-x| = x$. FALSO.

$$|-x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

D. si $x \in \mathbb{R}$, $|x-5| = 5-x$. FALSO

$$|x-5| = \begin{cases} x-5 & \text{si } x \geq 5 \\ 5-x & \text{si } x < 5 \end{cases}$$

50.A

51.

$U =$ utilidades

$n =$ número de zapatos

$$U \geq 0$$

$$U = 60.000n - 20.000n - 24 \times 10^6$$

$$60.000n - 20.000n - 24 \times 10^6 \geq 0$$

$$40.000n - 24 \times 10^6 \geq 0$$

$$40.000n \geq 24 \times 10^6$$

$$n \geq \frac{24 \times 10^6}{4 \times 10^4}$$

$$n \geq 6 \times 10^2 = 600$$

$$\boxed{n \geq 600}$$

51.B

52. $x^2 - 15 - m(2x - 8) = 0$

Para que las raíces de un polinomio sean de grado 2 se requiere que exista un $k \in \mathbb{R}$ | $(x+k)^2 = 0$.

Es decir:

$$(x+k)^2 = x^2 + 2kx + k^2$$

En la ecuación original:

$$x^2 - 2mx + (8m - 15) = 0$$

Entonces se debe cumplir que

$$\begin{cases} -2mx = 2kx & (1) \\ 8m - 15 = k^2 & (2) \end{cases}$$

Despejando m en (1):

$$m = -k$$

Reemplazando m en (2)

$$k^2 = -8k - 15$$

$$k^2 + 8k + 15 = 0$$

$$(k+3)(k+5) = 0 \Rightarrow k = -3 \vee k = -5$$

$$\boxed{m = 3 \vee m = 5}$$

52.A

53. $f(x+y) = f(x) + f(y)$

(1) $f(n) = nf(1)$. Verdadero

$$f(n) = f(\underbrace{1+1+\dots+1}_{n \text{ veces}}) = \underbrace{f(1)+f(1)+\dots+f(1)}_{n \text{ veces}} = n \cdot f(1)$$

(2) $f(nk) = f(n)f(k)$ FALSO. $f(\underbrace{k+k+\dots+k}_{n \text{ veces}}) = \underbrace{f(k)+f(k)+\dots+f(k)}_{n \text{ veces}} = nf(k) = nk f(1)$

(3) $f(n^2) = 2n$. FALSO

$$f(n^2) = f(n \cdot n) = f(\underbrace{n+n+\dots+n}_{n \text{ veces}}) = n \cdot f(n) = n^2 f(1)$$

(4) $f(2n) = 2f(n)$. VERDADERO

$$f(2n) = f(n+n) = f(n) + f(n) = 2f(n)$$

53.C

54.

$$\frac{3}{2x} - \frac{1}{2} = 2x \therefore \frac{6-2x}{4x} = 2x \therefore \frac{8x^2}{2} = \frac{6-2x}{2} \therefore 4x^2 + x - 3 = 0$$

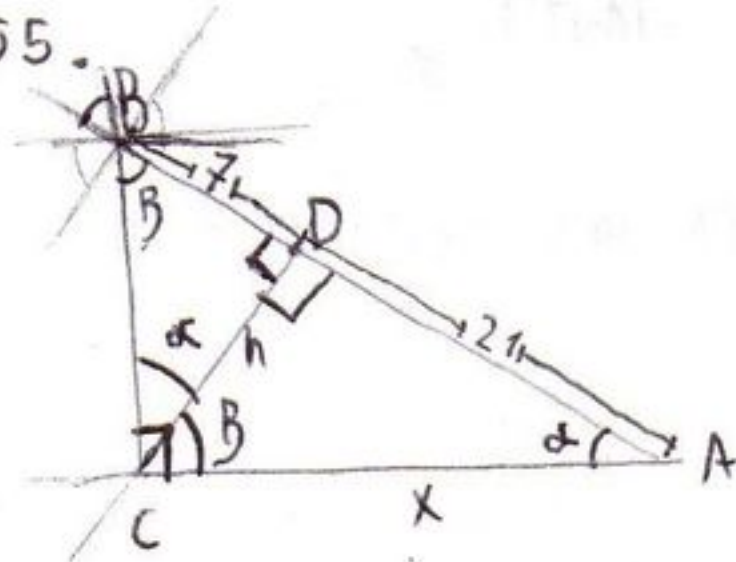
$$(2x+2)(2x-\frac{3}{2}) = 0 \therefore 2(x+1)(4x-3) = 0 \therefore (x+1)(4x-3) = 0$$

$$x = -1 \vee x = \frac{3}{4}$$

$$4x-3 = 0 \\ x = \frac{3}{4}$$

54.B

55.



$$\tan B = \frac{21}{h} \quad \wedge \quad \tan B = \frac{h}{7}$$

$$\frac{h}{7} = \frac{21}{h} \therefore h^2 = 7 \cdot 21 \therefore h = 7\sqrt{3}$$

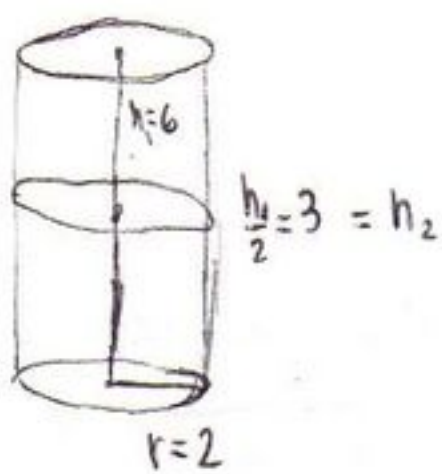
$$DA^2 + DC^2 = x^2 \therefore 21^2 + 7^2 \cdot 3 = x^2$$

$$x^2 = 7^2 \cdot 3^2 + 7^2 \cdot 3 \therefore x = \sqrt{7^2 \cdot 3(3+1)}$$

$$\therefore x = \sqrt{7^2 \cdot 3 \cdot 4} = \sqrt{7^2 \cdot 2^2 \cdot 3} = 14\sqrt{3} \therefore x = 14\sqrt{3}$$

55.D

56.



$V_2 =$ volumen del tanque hasta la mitad...

$$V_2 = \pi r^2 \cdot h$$

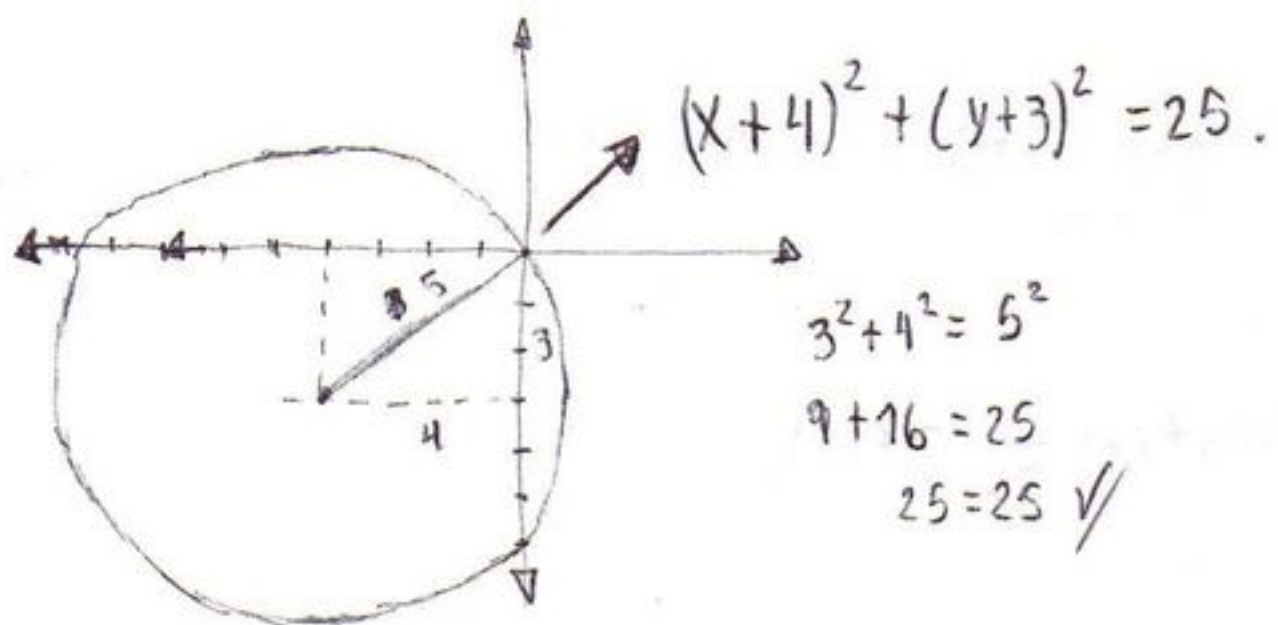
$$V_2 = \pi \cdot 2^2 \cdot 3$$

$$V_2 = \pi \cdot 4 \cdot 3$$

$$V_2 = 12\pi$$

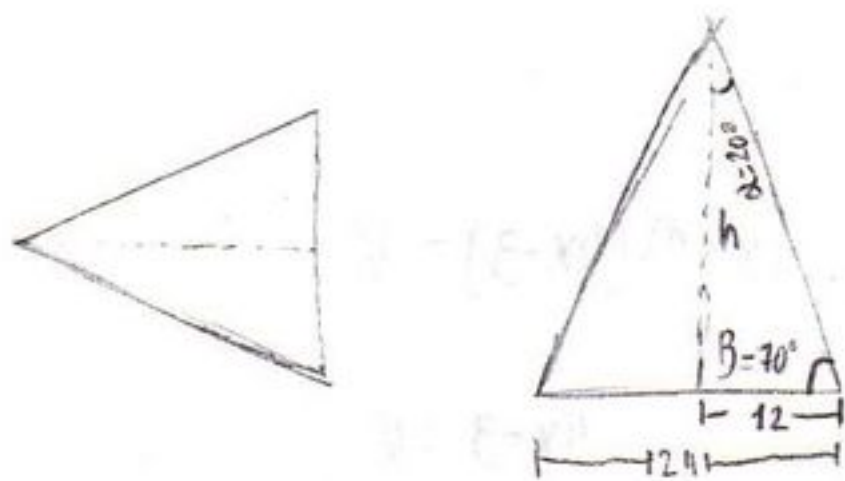
56.B

57.



57.A

58.



B. $\tan \alpha = \frac{12}{h} \therefore h = \frac{12}{\tan 20^\circ}$ FALSO.

A. $\cos \beta = \frac{12}{\sqrt{12^2 + h^2}} \therefore \sqrt{12^2 + h^2} = \frac{12}{\cos \beta} \therefore h = \sqrt{\frac{12^2}{\cos^2 \beta} - 12^2}$

$$h = \sqrt{\frac{12^2 - 12^2 \cos^2 \beta}{\cos^2 \beta}} = \sqrt{\frac{12^2 (1 - \cos^2 \beta)}{\cos^2 \beta}} = 12 \sqrt{\frac{\sin^2 \beta}{\cos^2 \beta}}$$

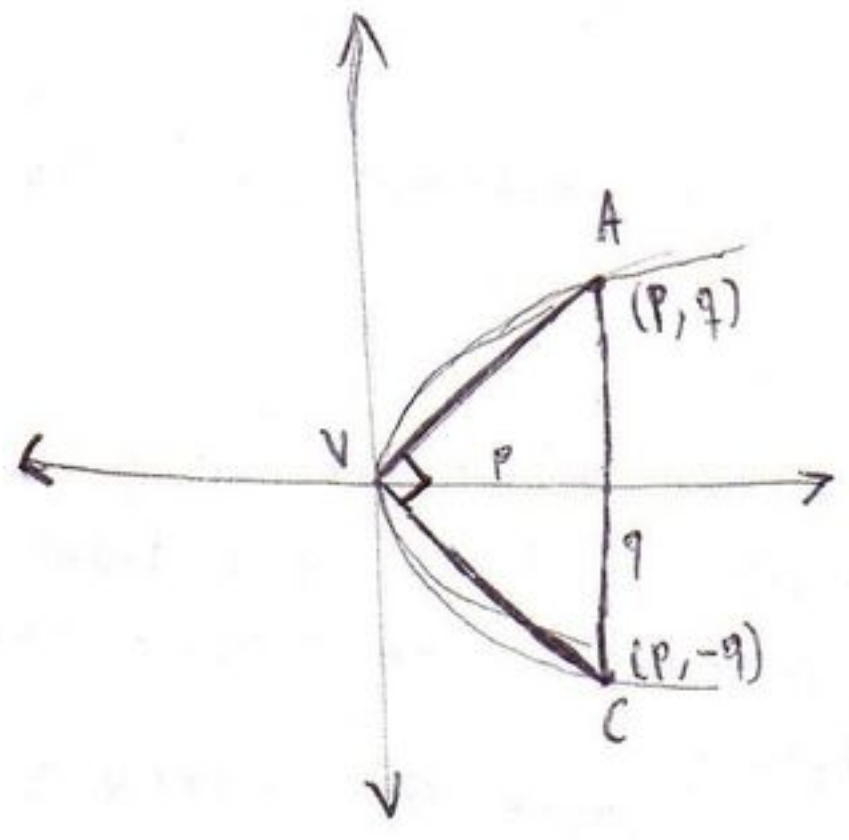
$h = 12 \sqrt{\tan^2 \beta} = 12 \tan 70^\circ$ Inutil.

C. $\sin \beta = \frac{h}{\sqrt{h^2 + 12^2}} \therefore h = \sqrt{h^2 + 12^2} \cdot \sin \beta$ Inutil. No está en las opciones

D. $\cot \alpha = \frac{h}{12} \therefore \cot 20^\circ = \frac{h}{12} \therefore h = 12 \cdot \cot 20^\circ$

58.D

59.

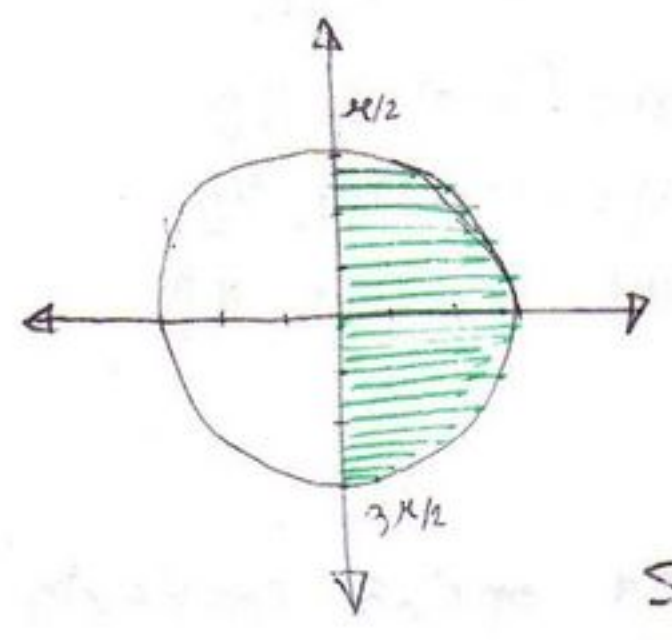


Area = A_T
 $A_T = pq$ pero $y^2 = 4x \dots$
 $q^2 = 4p$
 $AV = \sqrt{p^2 + q^2}$
 $VC = \sqrt{p^2 + (-q)^2} = \sqrt{p^2 + q^2}$

$$A_T = \frac{\sqrt{p^2 + q^2} \cdot \sqrt{p^2 + q^2}}{2} = \frac{p^2 + q^2}{2} = \frac{p^2 + 4p}{2} \therefore A_T = \frac{p^2 + 4p}{2}$$

59.C

60. $0^\circ \leq \theta \leq 2\pi$, $\sin \theta = \frac{a}{b}$, $\cos \theta = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b}$, $b > 0$



Como $\cos \theta > 0$ pues $b > 0 \wedge \sqrt{b^2 - a^2} > 0 \dots b > a$.
 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \wedge \frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq 2\pi$

$\equiv \cos \theta$

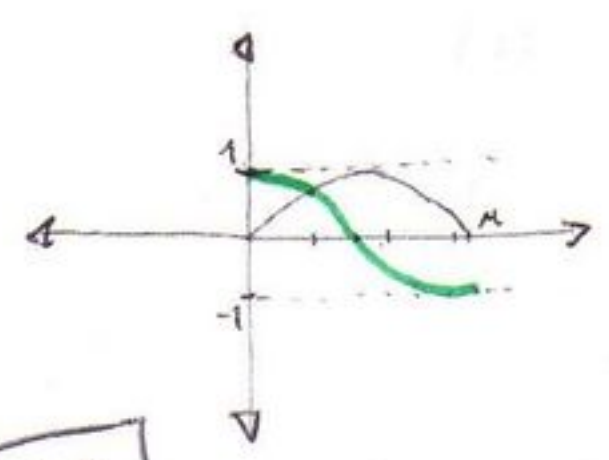
Si $a > 0 \Rightarrow 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$
 Si $a < 0 \Rightarrow \frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq 2\pi$

La única respuesta que se ajusta a las condiciones es:

60.B

$\frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq 2\pi \wedge a < 0$

61. $x, y \in (0, \pi)$



En este intervalo, $\cos x$ es inyectiva, por lo cual
 Si $\cos x = \cos y \Rightarrow x = y$.

Además $\cos x$ es decreciente en todo el recorrido:

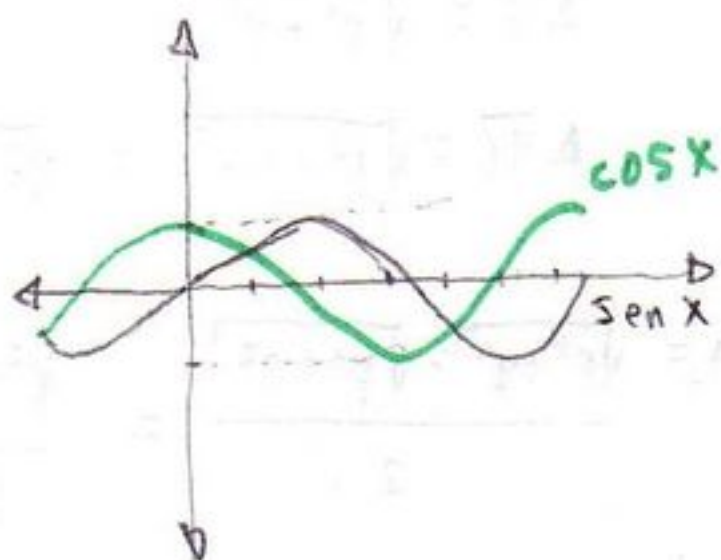
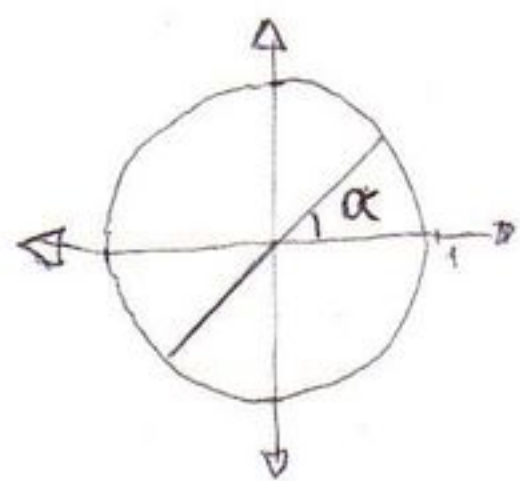
Si $x < y \Rightarrow \cos x > \cos y$

61.B

A.B

62. La gráfica ilustra el hecho de que todo α satisface:

En realidad la gráfica no ilustra mucho, pero podemos usar otra gráfica, en coordenadas cartesianas...



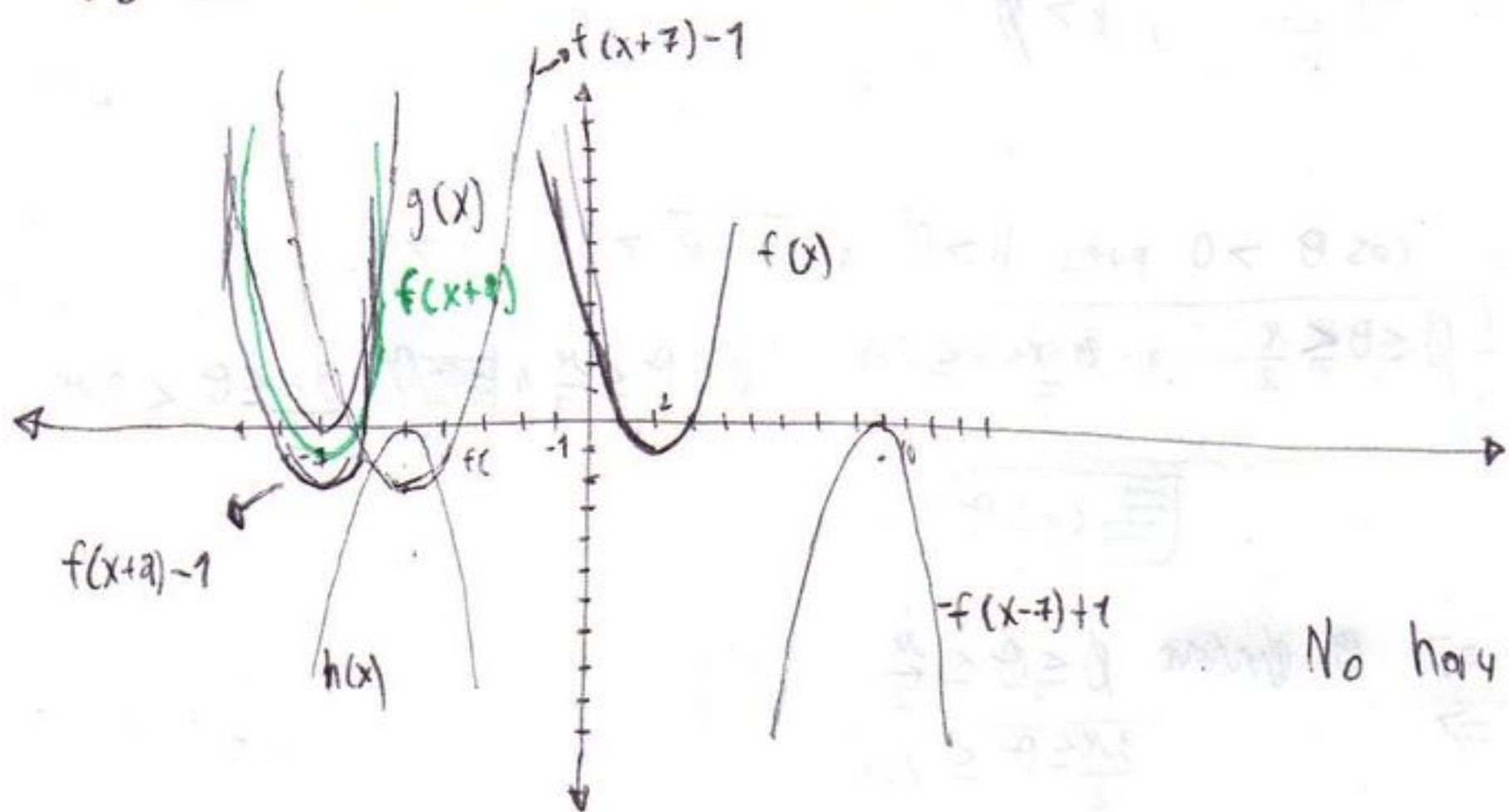
Se puede observar, después de observar un rato, que todas las respuestas no tienen sentido excepto:

$$\cos(\alpha + 180^\circ) = \sin(\alpha - 90^\circ)$$

Las gráficas coinciden (cartesianas)
Los triángulos se rotan (polares).

62.C

63. Se muestran a continuación funciones f, g, h:



A. $g(x) = f(x+a)$. NO.

B. $h(x) = f(x+7) - 1$. NO

C. $h(x) = -f(x-7) + 1$. NO

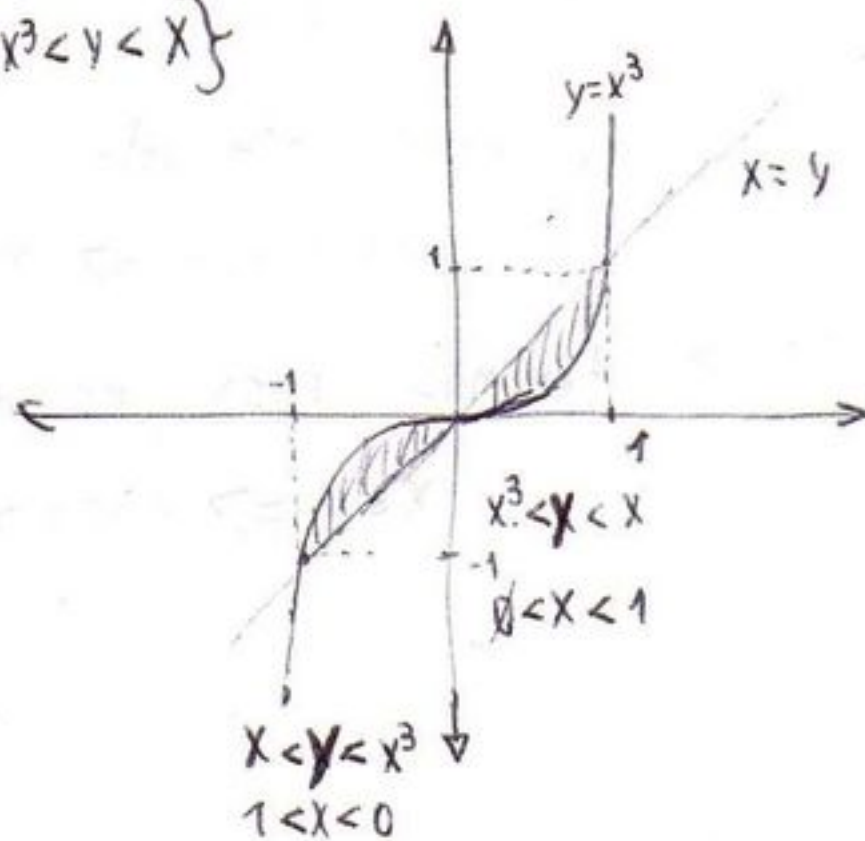
D. $g(x) = f(x+a) - 1$. NO.

No hay ninguna opción correcta.

63. Z: inconsistente

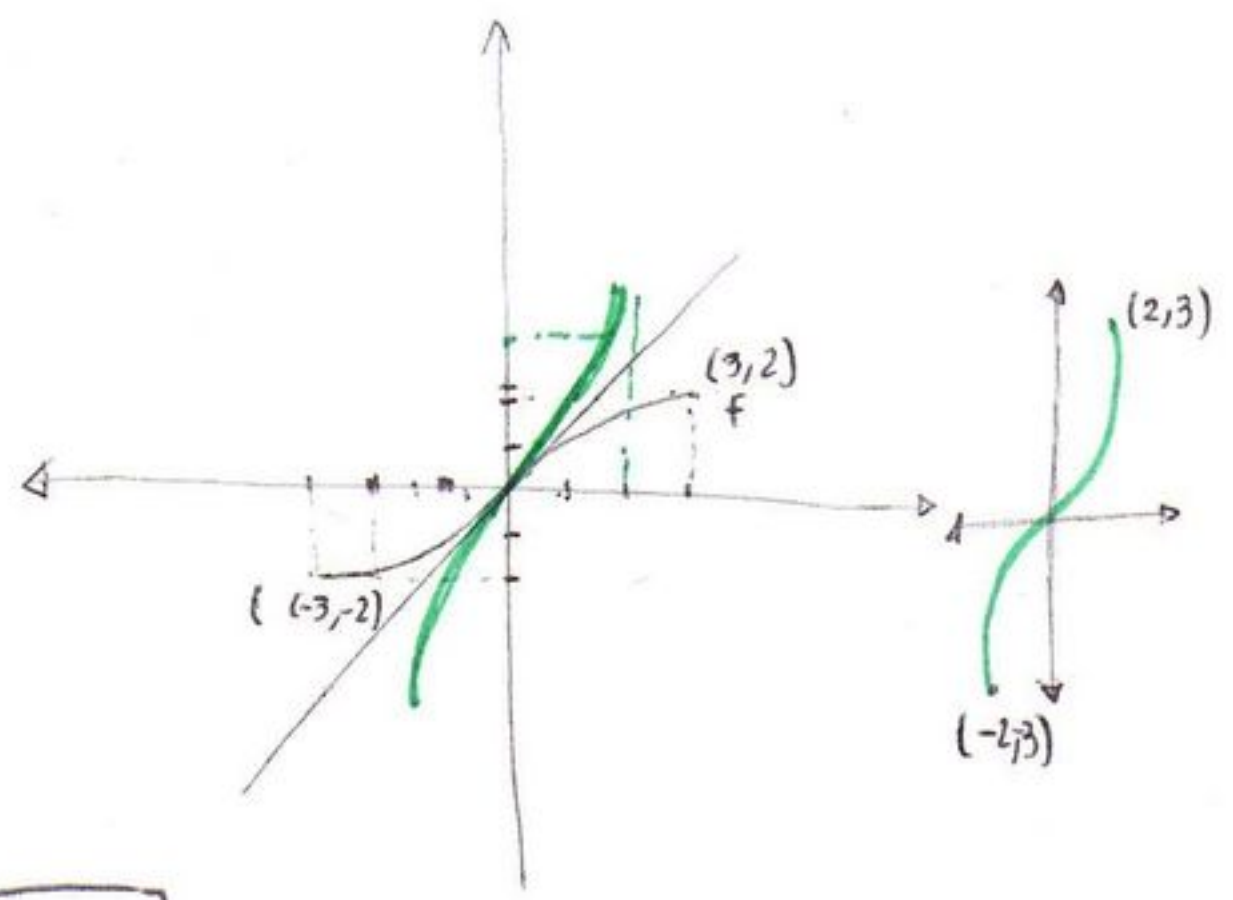
64. La región sombreada corresponde al conjunto:

$$\{(x,y) \mid -1 < x < 0, x < y < x^3\} \cup \{(x,y) \mid 0 < x < 1, x^3 < y < x\}$$



64.A

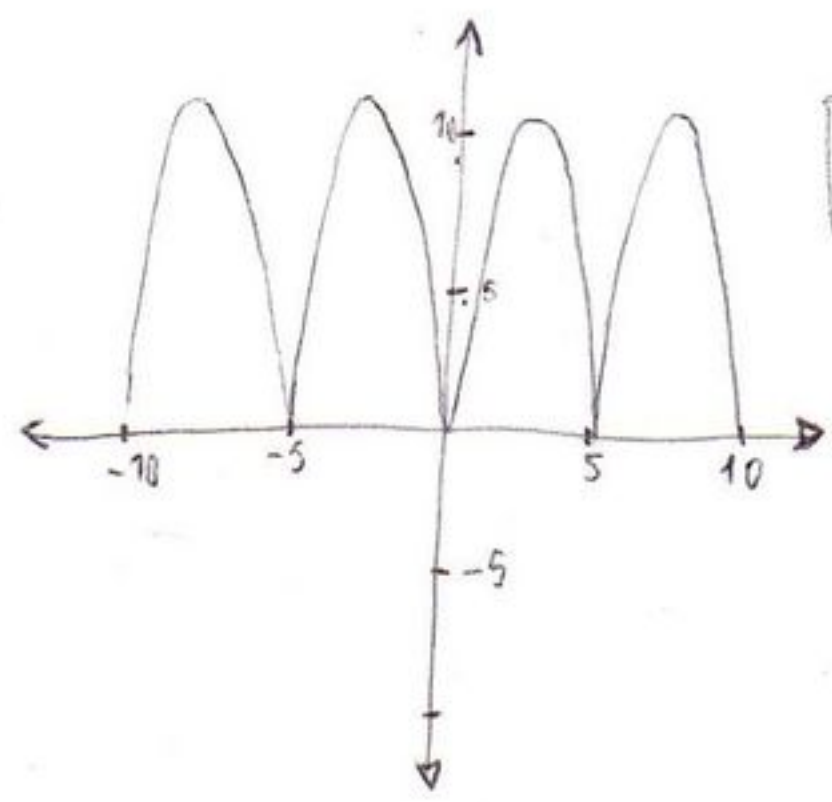
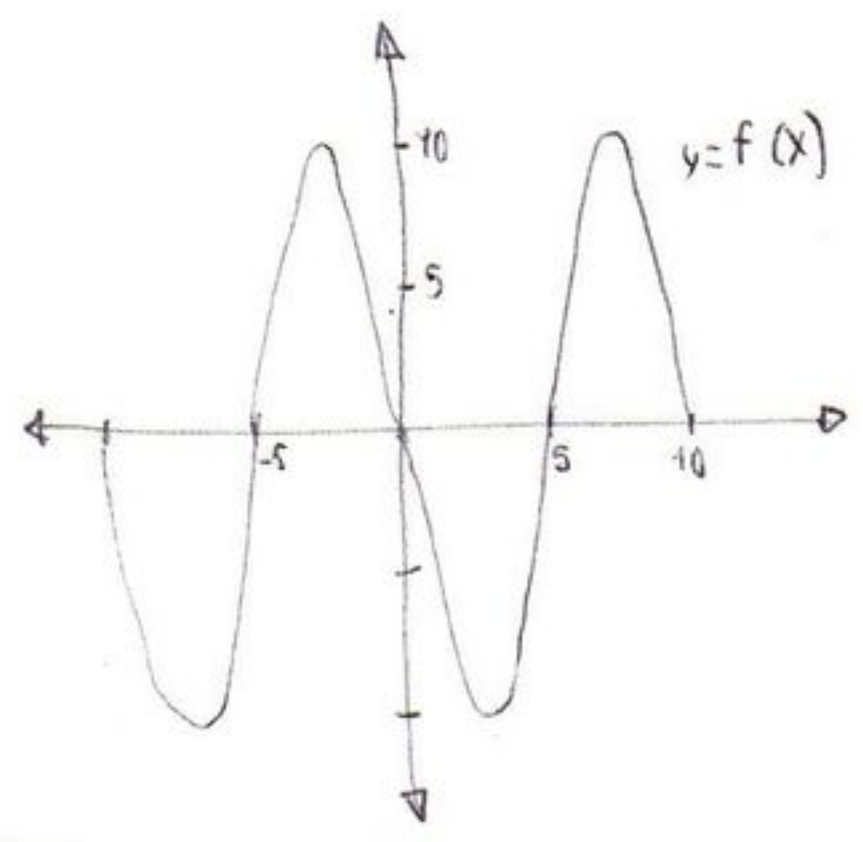
65.



Para graficar la inversa de una función f , se refleja la gráfica de dicha función sobre la recta $x=y$.

65.C

66.

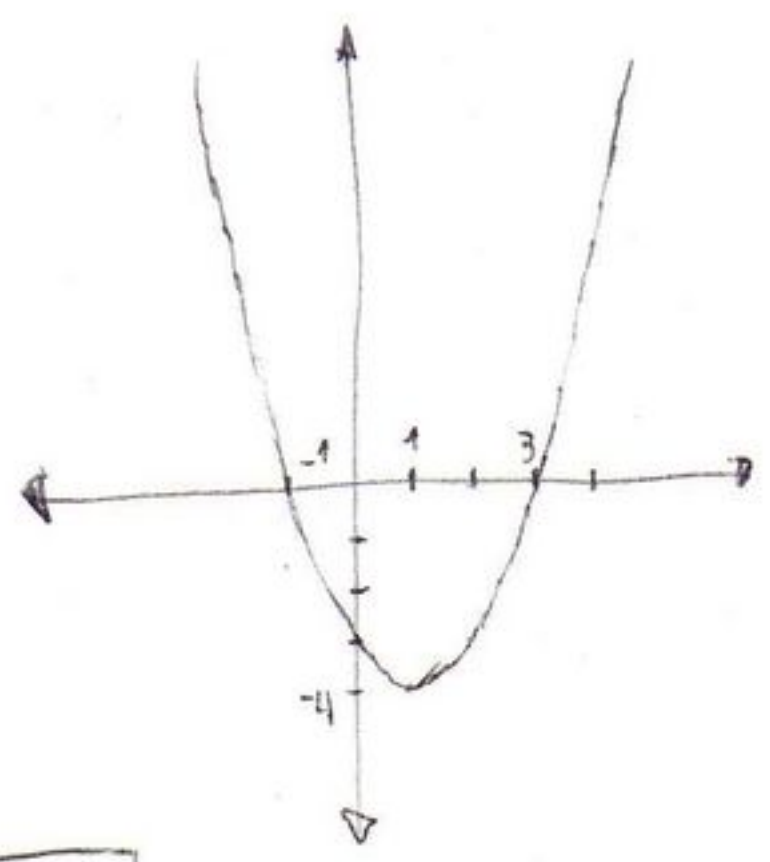


$y = |f(x)|$

El valor absoluto vuelve todo positivo. Como la alegría...

66.B

67. La gráfica representa la ecuación:



$$y = (x+1)(x-3)$$

$$y = x^2 - 3x + x - 3$$

$$y = x^2 - 2x - 3 \quad \text{RTA.}$$

Es x^2 pues a una distancia horizontal de 2, la distancia vertical es 4.

67.A