SOLUCIONARIO DE LA SECCIÓN DE MATEMÁTICAS DE EXÁMENES DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA 2006-2010

He tenido la suerte de pasar a la Nacho (Nombre que da el vulgo a la Magnánima Universidad Nacional de Colombia) la primera vez que me presenté. Pero por cuestiones vocacionales me retiré de ingeniería de sistemas para presentarme a medicina. Pues la medicina china me encanta…

En fin… Este proyecto nace por necesidad. La necesidad de retribuir lo que se me ha otorgado y de estudiar para el nuevo examen de admisión. Gracias a www.pasaralaunacional.com y a Cristian Hernández por publicar los exámenes de 2006 a 2010 y por solucionar los de los últimos años, respectivamente.

Este es un gesto de agradecimiento que espero le sirva a mucha gente. Siempre he sido ~~no tan malo~~ medianamente bueno en matemáticas, y la ventaja de que sea matemáticas y no literatura o sociales es que se puede estar más seguro de las respuestas sin temor a la "interpretación subjetiva del sentido de tal o cual palabra…"

La mayoría de ejercicios están resueltos, algunos tienen una que otra demostración… Pero sólo algunos… Cuando me he equivocado en algún ejercicio y la equivocación no ha sido tan infantil, he dejado la huella del error para no caer en el mismo.

Si encuentra alguna errata, señor lector, por favor escríbame a kamiloelgenial@hotmail.com : se lo agradeceré infinitamente.

La idea del solucionario es ver el examen, que lo pueden descargar en http://www.descargas.pasaralaunacional.com/estructura-y-respuestas-de-los-examenes-de-admision-de-la-unal

e ir resolviendo cada problema.

(El examen 2008-1 aún no está publicado. Espero hacerlo pronto.

Algunos símbolos que usé en la solución del examen (si no se entiende alguno, pregúntenme…)

Algunos símbolos usados:

- $\therefore$ → "o lo que equivale a decir"
- $\in$ → "pertenece a"
- $|$ → "tal que"
- $\wedge$ → "y"
- $\emptyset$ → "cero"
- $\forall$ → Para todo
- $\exists$ → Existe un
- $\Rightarrow$ → Entonces
- $\vee$ → "o"
- → tachón forma 2
- → tachón
- $\cong$ → "congruente"
- $\mathbb{R}$ → Números reales
- $\mathbb{Z}$ → Números enteros
- 0 → cero

¡QUE COMIENCE LA FIESTA!

Camilo Alberto Pinzón Galvis

48.

A. $-\frac{25}{2}, -7, \frac{-3}{7}, 4, \ldots$ $\quad -7-\left(\frac{-25}{2}\right) = \frac{-7+25}{2} = \frac{15}{2}.\quad -\frac{25}{2}+\frac{15}{2} = -7.$

$-7+\frac{15}{2} = \frac{1}{2}.\quad \frac{1}{2} \neq \frac{-3}{7}.$ No está en progresión aritmética.

B. $\frac{2}{3}, 2, \frac{10}{3}, \frac{14}{3}, 6, \ldots$ $\quad \frac{2}{3}+\frac{4}{3} = \frac{6}{3} = 2.\quad \frac{6}{3}+\frac{4}{3} = \frac{10}{3}.\quad \frac{10}{3}+\frac{4}{3} = \frac{14}{3}.\quad \frac{14}{3}+\frac{4}{3} = \frac{18}{3} = 6.$

Está en progresión aritmética.

C. $\frac{1}{25}, -\frac{1}{25}, \frac{1}{5}, -1, \ldots$ $\quad \frac{-1}{25}-\frac{1}{25} = \frac{-2}{25}.\quad \frac{1}{25}-\frac{2}{25} = \frac{-1}{25}.$

$\frac{1}{5}-\frac{1}{25} = \frac{4}{25}.\quad \boxed{\frac{4}{25} \neq \frac{1}{5}}$ NO está en progresión aritmética.

Como se pregunta cual sucesión no está en progresion aritmética y hay por lo menos dos respuestas válidas, La pregunta se invalida.

48. Inconsistente

49.

Número	A. 3	B. 4	C. 5	D. 6
Divisores propios	1	2, 1	1	1, 2, 3
suma:	1	1+2 = 3	1	1+2+3 = 6
Perfecto? Suma == Numero	NO	NO	NO	SI.

6 es un ejemplo de número perfecto.

49. D

---

50. A. si $x \geq -3$, $|x+3| = x+3$. VERDADERO. Pues ... $\boxed{\text{si } x+3 \geq 0 \Rightarrow x \geq -3}$

B. si $x<0$, $|x-2| = x-2$. falso. si $x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$. $|x-2| = \begin{cases} x-2 & \text{si } x \geq 2 \\ -x+2 & \text{si } x < 2. \end{cases}$

C. si $x \in \mathbb{R}$, $|-x| = x$. FALSO. $\quad |-x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

D. si $x \in \mathbb{R}$, $|x-5| = 5-x$. FALSO $\quad |x-5| = \begin{cases} x-5 & \text{si } x \geq 5 \\ 5-x & \text{si } x < 5 \end{cases}$

50. A

51.

V = utilidades

n = número de zapatos

$$U \geq \emptyset$$
$$U = 60.000n - 20.000n - 24 \times 10^6$$

$$60.000n - 20.000n - 24 \times 10^6 \geq 0$$
$$40.000n - 24 \times 10^6 \geq \emptyset$$
$$40.000n \geq 24 \times 10^6$$
$$n \geq \frac{24 \times 10^6}{4 \times 10^4}$$
$$n \geq 6 \times 10^2 = 600$$
$$\boxed{n \geq 600}$$

$\boxed{51.B}$

52. $x^2 - 15 - m(2x-8) = \emptyset$

Para que las raices de un polinomio sean de grado 2 se requiere que exista un $K \in \mathbb{R} \mid (x+K)^2 = \emptyset$.

Es decir: $(x+K)^2 = x^2 + 2Kx + K^2$

En la ecuación original:

$x^2 - 2mx + (8m-15) = \emptyset$ Entonces se debe cumplir que

$$\begin{cases} -2mx = 2Kx & (1) \\ 8m - 15 = K^2 & (2) \end{cases}$$

Despejando m en (1):

$$m = -K$$

Reemplazando m en (2)

$$K^2 = -8K - 15$$
$$K^2 + 8K + 15 = \emptyset$$
$$(K+3)(K+5) = \emptyset \Rightarrow K = -3 \lor K = -5$$
$$\boxed{m = 3 \lor m = 5}$$

$\boxed{52.A}$

53. $f(x+y) = f(x) + f(y)$

(1) $f(n) = nf(1)$. Verdadero

$$f(n) = f(\underbrace{1+1+\ldots+1}_{n \text{ veces}}) = \underbrace{f(1)+f(1)+\ldots+f(1)}_{n \text{ veces}} = n\cdot f(1)$$

(2) $f(nk) = f(n)f(k)$ FALSO. $f(\underbrace{k+k+\ldots+k}_{n \text{ veces}}) = \underbrace{f(k)+f(k)+\ldots+f(k)}_{n \text{ veces}} = nf(k) = nk\,f(1)$

(3) $f(n^2) = 2n$. FALSO

$$f(n^2) = f(n\cdot n) = f(\underbrace{n+n+\ldots+n}_{n \text{ veces}}) = n\cdot f(n) = n^2 f(1)$$

(4) $f(2n) = 2f(n)$. VERDADERO

$$f(2n) = f(n+n) = f(n)+f(n) = 2f(n).$$

$\boxed{53.C}$

54.

$$\frac{3}{2x} - \frac{1}{2} = 2x \;\therefore\; \frac{6-2x}{4x} = 2x \;\therefore\; \frac{8x^2}{2} = \frac{6-2x}{2} \;\therefore\; 4x^2+x-3=\emptyset$$

$$(2x+2)\left(2x-\frac{3}{2}\right) = \emptyset \;\therefore\; 2(x+1)\left(\frac{4x-3}{2}\right) = \emptyset \;\therefore\; (x+1)(4x-3) = \emptyset$$

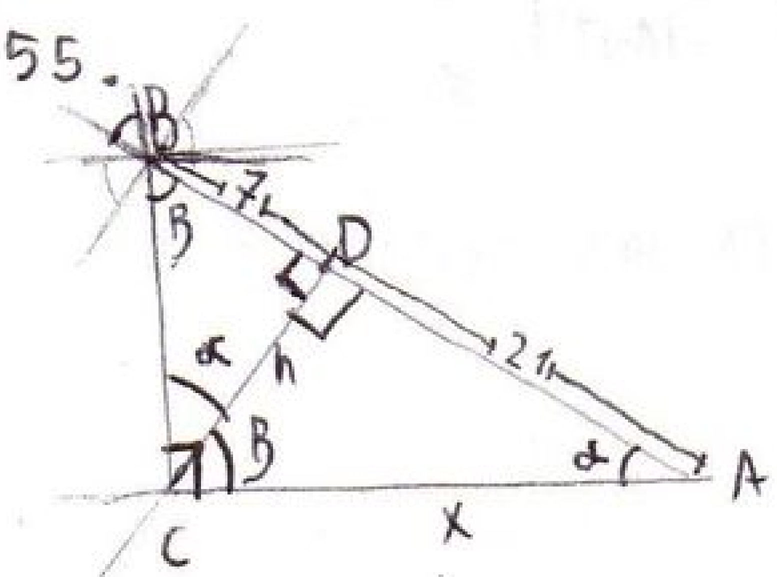
$$\boxed{x=-1 \;\vee\; x=\frac{3}{4}}$$

$4x-3=\emptyset$

$x = \frac{3}{4}$

$\boxed{54.B}$

55.



$$\tan\beta = \frac{21}{h} \;\wedge\; \tan\beta = \frac{h}{7}$$

$$\frac{h}{7} = \frac{21}{h} \;\therefore\; h^2 = 7\cdot 21 \;\therefore\; h = \boxed{7\sqrt{3}}$$

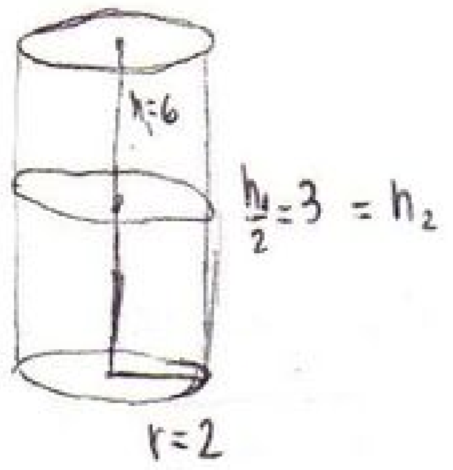
$$\therefore\; DA^2 + DC^2 = x^2 \;\therefore\; 21^2 + 7^2\sqrt{3}^2 = x^2$$

$$x^2 = 7^2\cdot 3^2 + 7^2\cdot 3 \;\therefore\; x = \sqrt{7^2\cdot 3\,(3+1)}$$

$$\therefore\; x = \sqrt{7^2\cdot 3\cdot 4} = \sqrt{7^2\cdot 2^2\cdot 3} = 14\sqrt{3} \;\therefore\; \boxed{x = 14\sqrt{3}}$$

$\boxed{55.D}$

56.



V_2= volumen del tanque hasta la mitad...

$V_2 = \pi r^2 \cdot h$

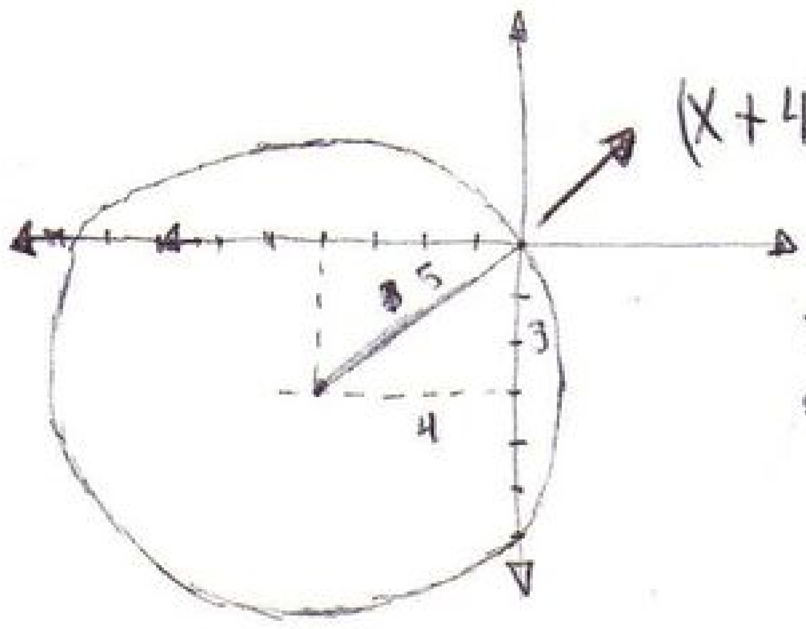
$V_2 = \pi \cdot 2^2 \cdot 3$

$V_2 = \pi \cdot 4 \cdot 3$

$\boxed{V_2 = 12\pi}$

$\boxed{56.B}$

57.



$(x+4)^2+(y+3)^2=25.$

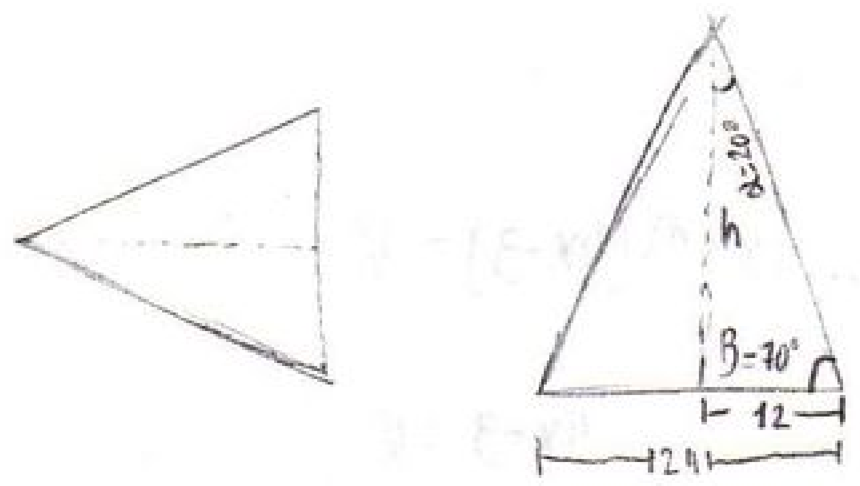
$3^2+4^2=5^2$

$9+16=25$

$25=25$ ✓

$\boxed{57.A}$

58.



B. $\tan\alpha = \frac{12}{h} \therefore \boxed{h = \frac{12}{\tan 20^\circ}}$ FALSO.

A. $\cos\beta = \frac{12}{\sqrt{12^2+h^2}} \therefore \sqrt{12^2+h^2} = \frac{12}{\cos\beta} \therefore h = \sqrt{\frac{12^2}{\cos^2\beta} - 12^2}$

$h = \sqrt{\frac{12^2 - 12^2\cos^2\beta}{\cos^2\beta}} = \sqrt{\frac{12^2(1-\cos^2\beta)}{\cos^2\beta}} = 12\sqrt{\frac{\operatorname{sen}^2\beta}{\cos^2\beta}}$

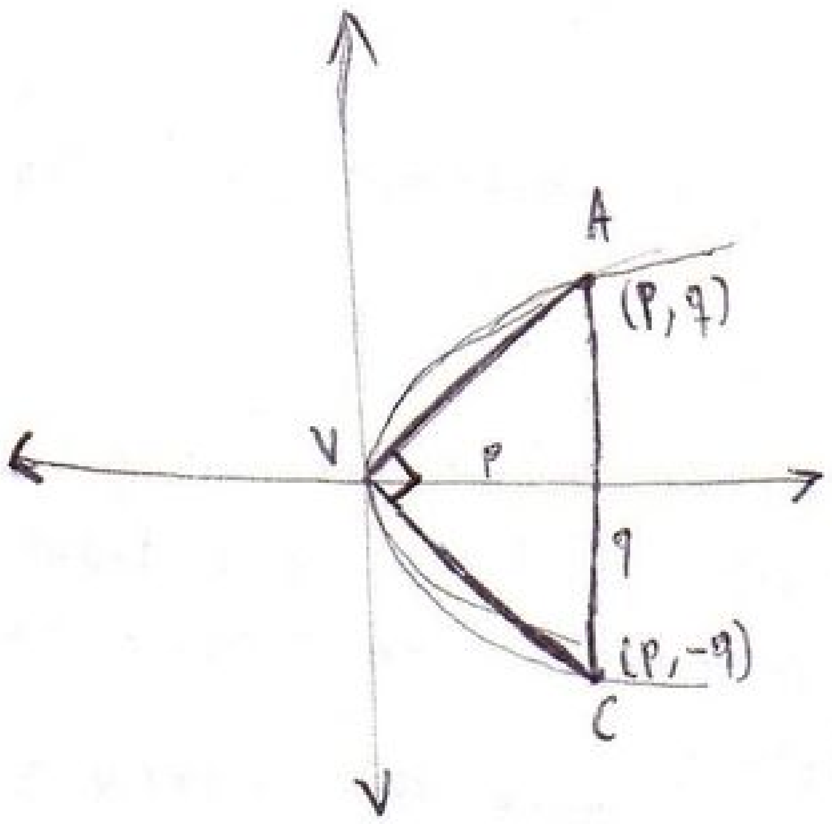
$h = 12\sqrt{\tan^2\beta} = 12\tan 70^\circ$ Inutil.

C. $\operatorname{sen}\beta = \frac{h}{\sqrt{h^2+12^2}} \therefore h = \sqrt{h^2+12^2}\cdot\operatorname{sen}\beta$. Inutil. No está en las opciones

D. $\cot\alpha = \frac{h}{12} \therefore \cot 20^\circ = \frac{h}{12} \therefore \boxed{h = 12\cdot\cot 20^\circ}$

$\boxed{58.D}$

59.



Area = A_T

$A_T = pq$ pero $y^2 = 4x$ ...

$q^2 = 4p$

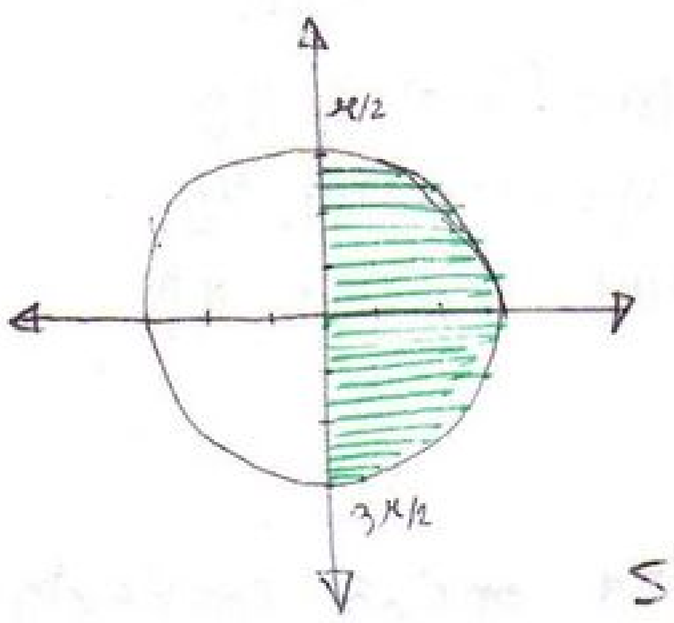
$\overline{AV} = \sqrt{p^2+q^2}$

$\overline{VC} = \sqrt{p^2+(-q)^2} = \sqrt{p^2+q^2}$

$$A_T = \frac{\sqrt{p^2+q^2}\cdot\sqrt{p^2+q^2}}{2} = \frac{p^2+q^2}{2} = \boxed{\frac{p^2+4p}{2}} \therefore \boxed{A_T = \frac{p^2+4p}{2}}$$

$\boxed{59.C}$

60. $0° \le \theta \le 2\pi$, $\operatorname{sen}\theta = \frac{a}{b}$, $\cos\theta = \frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b}$, $b > \emptyset$



Como $\cos\theta > 0$ pues $b > \emptyset \wedge \sqrt{b^2-a^2} > 0$... $b > a$.

$\emptyset \le \theta \le \frac{\pi}{2} \wedge \frac{3\pi}{2} \le \theta \le 2\pi$

$\boxed{\equiv \cos\theta}$

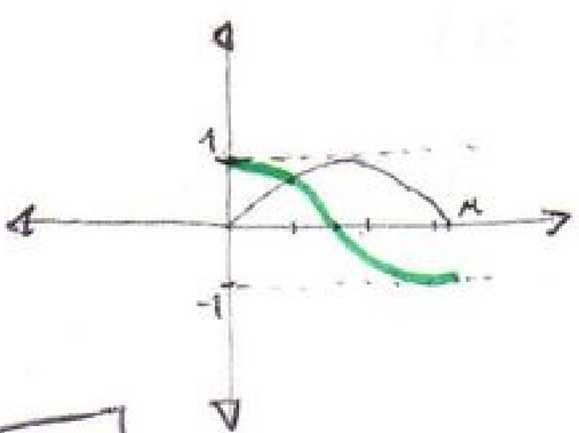
Si $a > \emptyset \Rightarrow \emptyset \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

$\boxed{\text{Si } a < \emptyset \Rightarrow \frac{3\pi}{2} \le \theta \le 2\pi}$

La única respuesta que se ajusta a las condiciones es:

$\boxed{60.B}$ $\boxed{\frac{3\pi}{2} \le \theta \le 2\pi \wedge a < \emptyset}$

61. $x, y \in (0, \pi)$



En este intervalo, $\cos x$ es inyectiva, por lo cual

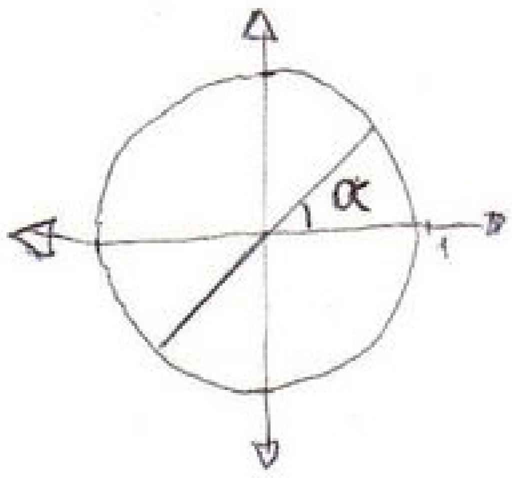
Si $\cos x = \cos y \Rightarrow x = y$.

Además $\cos x$ es decreciente en todo el recorrido:

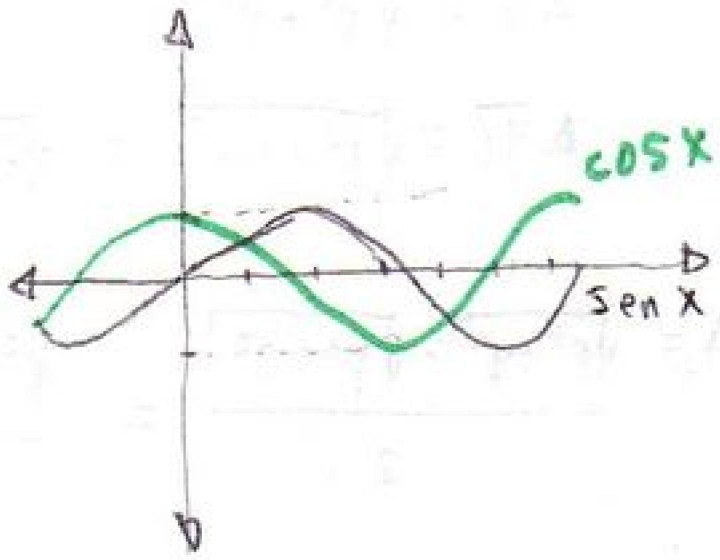
Si $x < y \Rightarrow \cos x > \cos y$

$\boxed{61.B}$

62. La gráfica ilustra el hecho de que todo α satisface:



En realidad la gráfica no ilustra mucho, pero podemos usar otra gráfica, en coordenadas cartesianas...

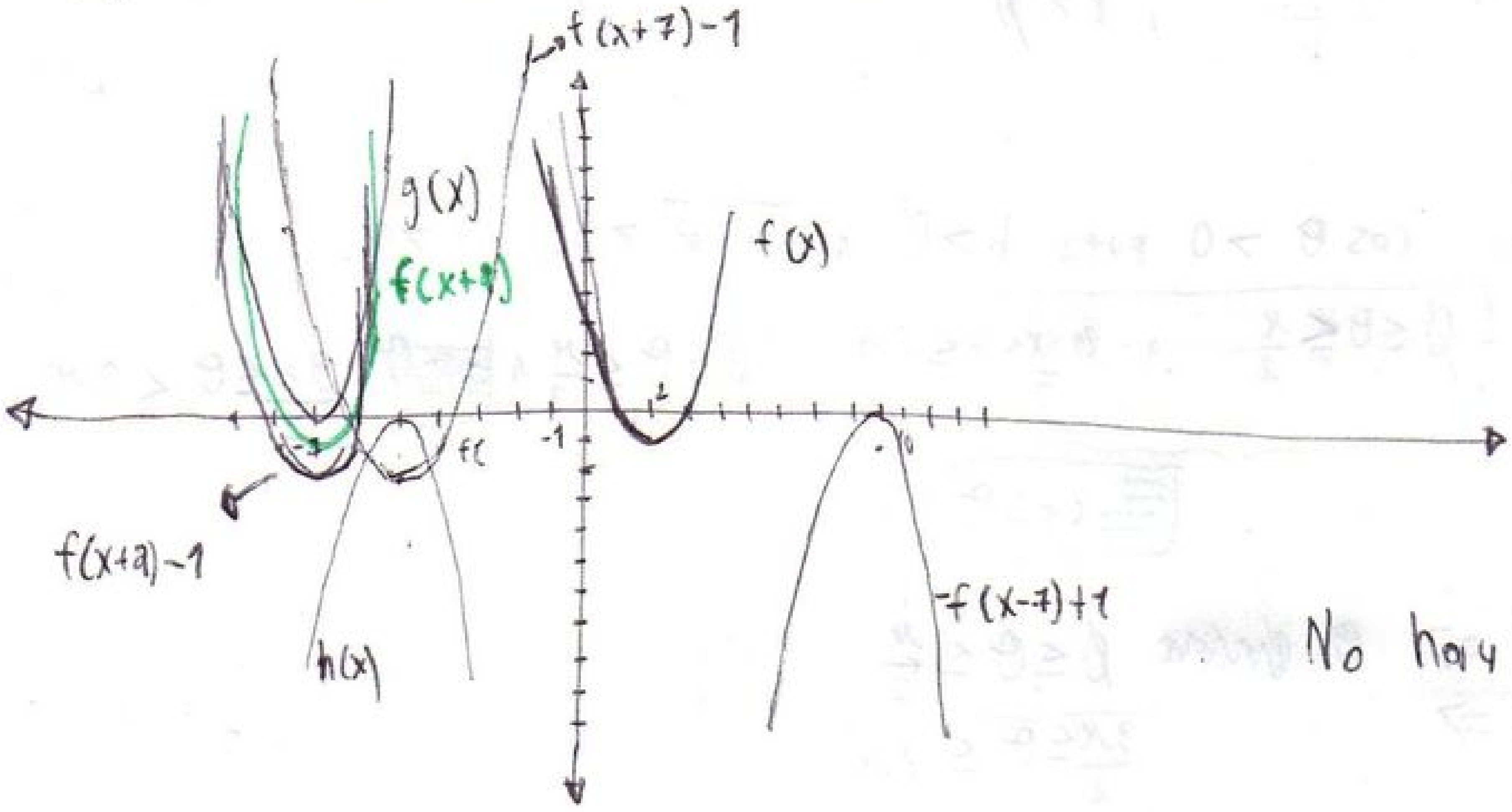


Se puede observar, después de observar un rato, que todas las respuestas no tienen sentido excepto: $\cos(\alpha+180°)=\mathrm{sen}(\alpha-90°)$

Las gráficas coinciden (cartesianas)
Los triángulos se rotan (polares).

$\boxed{62.C}$

63. Se muestran a continuación funciones f, g, h:



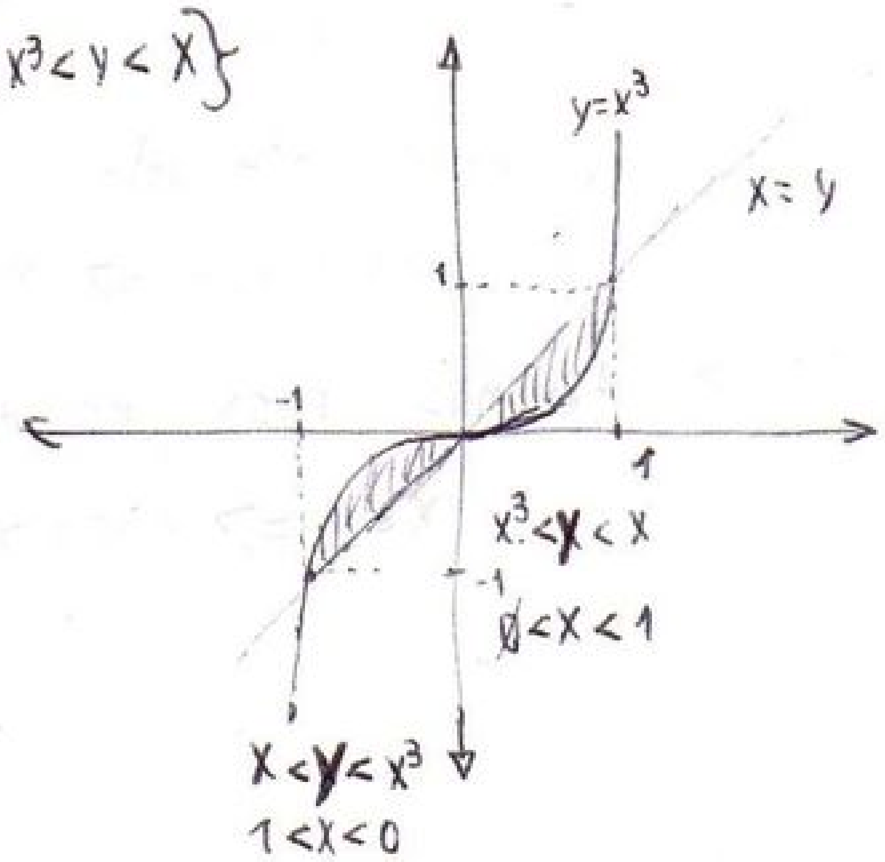
A. $g(x)=f(x+9)$. NO.
B. $h(x)=f(x+7)-1$. NO
C. $h(x)=-f(x-7)+1$. NO
D. $g(x)=f(x+9)-1$. NO.

No hay ninguna opción correcta.

$\boxed{63.\ Z:\text{inconsistente}}$

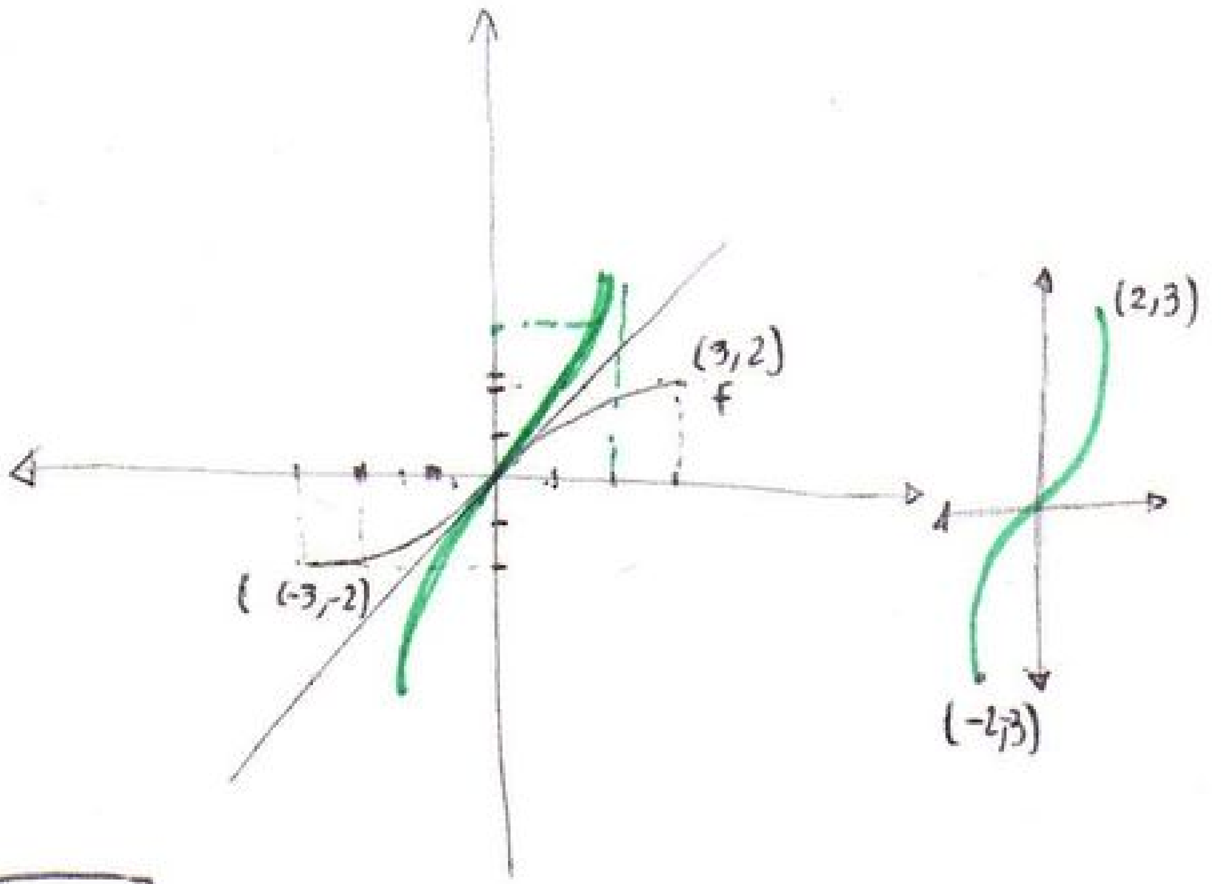
64. La región sombreada corresponde al conjunto:

$$\{(x,y)\mid -1<x<0,\ x<y<x^3\}\cup\{(x,y)\mid 0<x<1,\ x^3<y<x\}$$



$\boxed{64.A}$

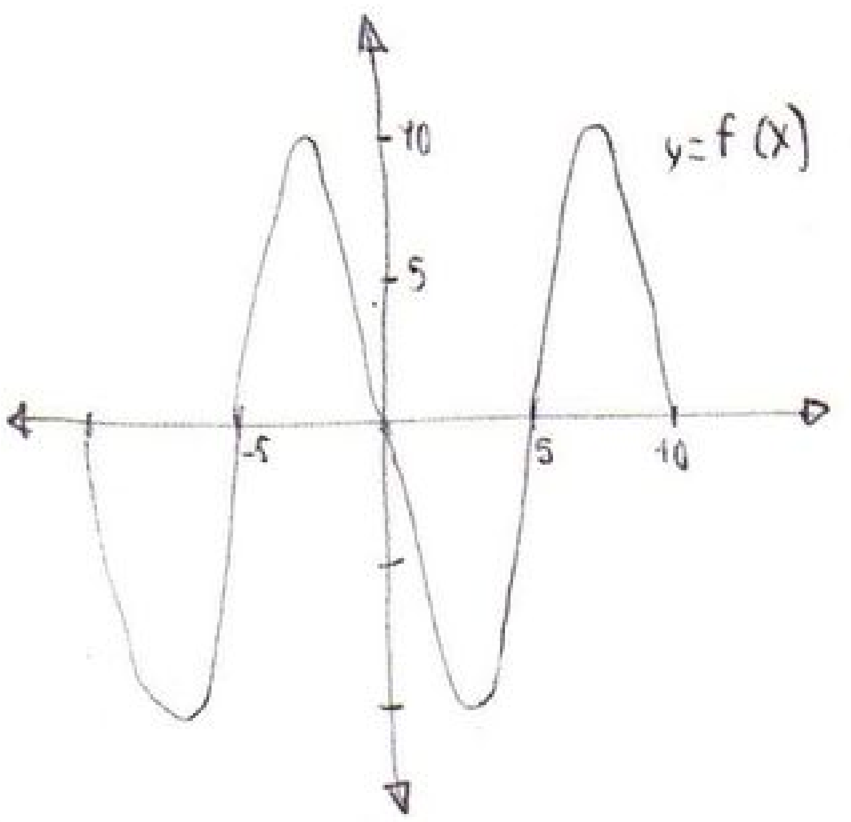
65.

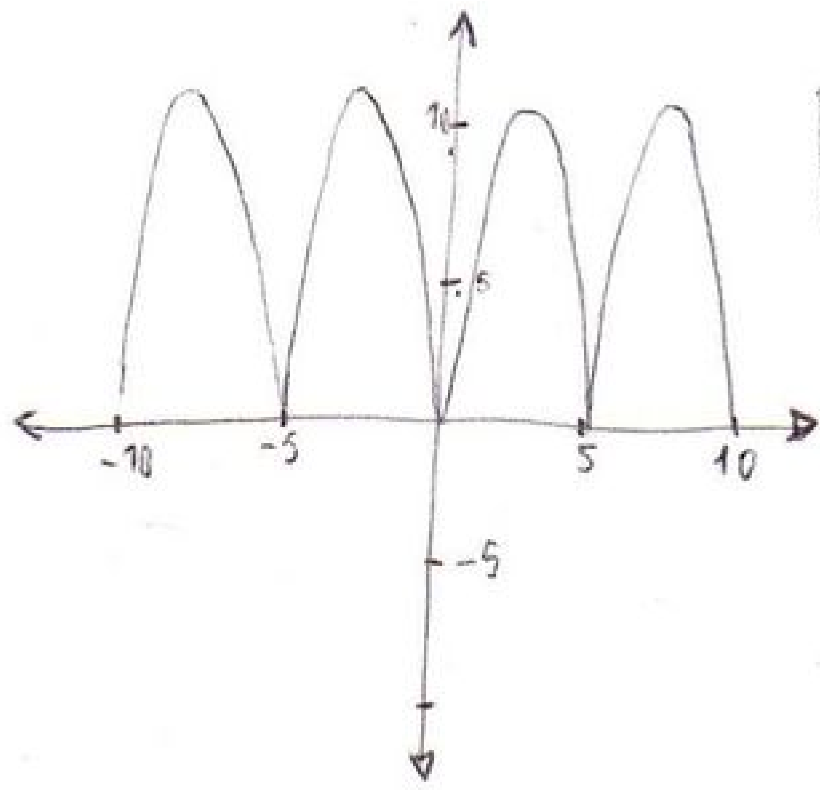


Para graficar la inversa de una funcion f, se refleja la gráfica de dicha función sobre la recta x=y.

$\boxed{65.C}$

66.



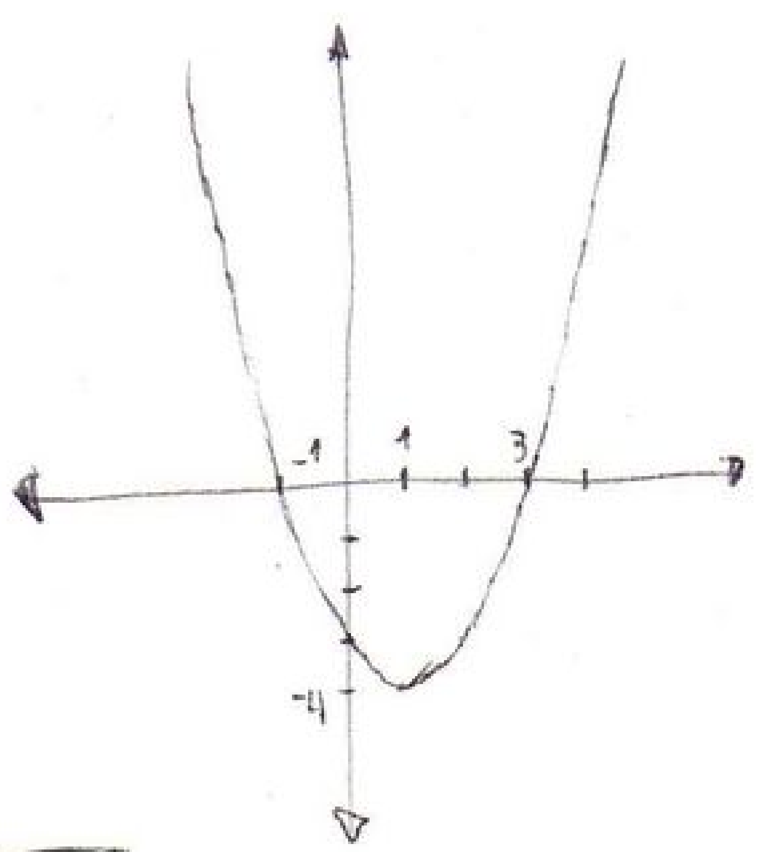


$\boxed{y=|f(x)|}$

El valor absoluto vuelve todo positivo. Como la alegria...

$\boxed{66.B}$

67. La gráfica representa la ecuación:



$y=(x+1)(x-3)$

$y=x^2-3x+x-3$

$\boxed{y=x^2-2x-3}$ RTA.

Es x^2 pues a una distancia horizontal de 2, la distancia vertical es 4.

$\boxed{67.A}$